This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

QA
31
.E88
S731
1692

EVCLIDIS ELEMENTORVM

SEX

LIBRI PRIORES

DEMONSTRATI

ab

HENRICO COETSIO

M.



EUCLIDIS
ELEMENTORUM
SEX
LIBRI PRIORES

*Magnam partem novis demon-
ſtrationibus*

ADORNATI

OPERA & STUDIO

HENRICI COETSII.



LUGDUNI BATAVORUM,
Apud DANIELEM à GAESBEEK,
M DC XCII.

PRÆFATIO
AD
LECTOREM.

ELementa demonſtrare aggredior Euclidis, Illuſtris Mathematici, qui tum propriis inventis, tum ab aliis inventorum, quæ paſſim diſperſa jacebant, collectione & juſta ordinatione Magni adeptus Geometræ nomen, de omni Matheſeos optime meritus eſt ſtudio: id quod abunde teſtatum faciunt tot doctiſſimorum virorum commentarii, quibus hæc Elementa, quorum utilitas paucos latet, per multa celebrata ſunt ſecula.

Admirandæ ſane ſunt Theonum, Proclorum, Commandi-

norum, Clauiorum, Bettinorum, & aliorum nominis haud obſcuri Mathematicorum lucubrationes, quæ adeo fertiles ſunt ac dilucidæ, ut univerſæ Matheſeos, quantum imo plus quam ſufficit, exinde depromi queant fundamenta. Quare ego, ne actum agere videar & aliorum ſolummodo repetere dicta, quod rem ipſam ſpectat & hujus Opuſculi, quem intendo, ſcopum paucis eloquar. Omnium Mathematicorum, qui in horum Euclidis Elementorum dilucidatione & demonſtratione poſteritati ſuam probare ſategerunt induſtriam, non una eademque obſervatur methodus; aliis quidem veterem & ab Euclide traditum nobia ſervantibus ordinem;

aliis

aliis vero non mordicus iſti ordini inhærentibus, ſed veritatum iis comprehenſarum maxime naturalem contemplanribus concatenationem. Ego neglecta poſteriori hac demonſtrandi via, illorum, qui Clariſſimi Geometræ authoritate ducuntur & veneratione, caſtra ſequor; in quorum partes me vel unica hæc trahit ratio, quod illis, qui horum Elementorum notitia jam quodammodo ſunt imbuti, ad ſublimiora Veterum Mathematicorum evolvenda opera faciliorem longe ſuppeditare mihi manuductionem videantur& aditum. Licet ab alterà parte minime ſua laude deſtituendi ſint, qui liberiorem ineuntes viam & rerum ipſarum, quan-

tum fieri poteſt, naturalem ſequentes ductum, proprio ingenio & ratiocinio litare maluerunt quam Veteris jurare in Verba Magiſtri.

In quo laborum genere haud poſtremo loco collocandi ſunt clariſſimus Chriſtophorus Sturmius & Ignatius Gaſton Pardies, quorum alter natione Germanus in ſua Matheſi enucleata, alter ex Galliis ortum ducens in ſuis Elementis Geometriæ, non ſolum Euclidis omnibus, verum etiam præcipuis Apollonii & Archimedis demonſtratis theorematibus, haud exiguam ſibi apud poſteros gratiam conciliabunt & laudem. Cum autem hæc Methodus, ut modo dixi, nos ab Antiquorum de-

demonſtrandi fontibus alienos reddat nimium, præſcriptum Euclidis potius quam alium ſequi placuit ordinem; cui tamen me non ita mancipare in animum induxi meum, ut illum ullo in loco invertere nefas duxerim: Siquidem Benignus comperiet Lector me non raro in demonſtranda aliqua propoſitione ſequentem & nondum demonſtratam vocare in auxilium; quam tamen tranſpoſitionem haud mediocrem afferre facilitatem non minori cum brevitate conjunctam videbit is, qui inſpicere dignabitur noſtram demonſtrationem ad 5 Libri I propoſitionem, eamque conferre cum Clavio, aut aliis, qui huic Propoſitioni multo plus quam altero

tanto longiorem accommodarunt demonſtrationem; cujus prolixitas multorum tyronum vel maximam in diſcendo frangit conſtantiam; præterquam quod ſuæ demonſtrationi immiſceant æqualitatem angulorum infra baſin, cum duo æqualia producta ſint latera: quæ tamen æqualitas iſtius Propoſitionis primarium minime facit ſcopum. Cui malo ab omni parte noſtram demonſtrationem remedium afferre putamus. Nec huic tranſponendi methodo ſcrupulum Mathematicorum figit rigor, qui Paralogiſmos, Principii petitiones & ſic dictos Circulos evitandi ſtudio omnem ſuam vim referens acceptam, priorum per poſteriora haudquaquam admit-

mittit demonſtrationem. Sic enim noſtris ordinatis demonſtrationibus, ut propoſitiones præcedentes ope ſequentium demonſtratæ, earum demonſtrationi vice verſa non iterum inſerviant, in iſtum ſcopulum impingendi ne minimo quidem laboramus periculo. Cæterum ipſis Demonſtrationibus Methodum Algebraicam applicuimus quodammodo, ita tamen ut a tyrone debitam non reſpuente attentionem facile intelligi poſſint; præſertim ſi paginam, quam ſignorum, quibus utimur, dabimus interpretem & huic præfationi immediate ſubjungemus inſpicere non recuſaverit: quo facto totius plurimarum propoſitionum demonſtrationis

curſum nullo negotio ſtatim comprehendet.

Problematum quidem constructiones ita diſponimus, ut ſingulæ illorum partes vel primo diſtinguantur intuitu; Theorematum vero propoſitionem ſtatim diſtincta, ſi quæ deſideratur, excipit præparatio, quæ claram ac perſpicuam comitem habet demonſtrationem, ut ſic omnibus & Problematum & Theorematum partibus ſatisfactum ſit abunde. Quid autem porro in ſingulis Libris, præſertim quinto, præſtitum ſit, non meum ſed æquum Benigni Lectoris eſto judicium. Cujus tamen fiduciæ eam non poſtulo interpretationem, ac ſi mihi ipſi perſuadere velim provectiorum ad ulteriora

aſpiranti nihil hic deſiderari curioſitati; cum non fercula doctorum palato grata virorum condire, ſed Tyronum Mathematici ſtudii cupidorum vota qualicunque hoc meo implere labore unice habeam in ſcopo; quem ſi mihi aſſequi detur, tum ſub idonea forma editorum; quorum jam diu laboravimus inopia, exemplarium defectum ſupplendo; tum quam plurimas horum Elementorum propoſitiones noxio prolixarum nimis demonſtrationum nudatas involucro, in clariorem, ut ſpero producendo lucem; abunde futurum puto, quod mihi gratuler. Hiſce vale, Benigne Lector, & ſi quid hoc opuſculum contineat proficui, in tuum verte commodum.

EXPLICATIO NOTARUM.

NE Tyronum in demonſtrando ardori vel minimam injiciamus moram, datam in Præfatione liberamus fidem, illique notarum ac ſignorum, quæ demonſtrationum brevitati inſervire fecimus, ſignificationem ſubjungimus.

1.

Nota ∞ *ſignificat æqualitatem; ut A* ∞ *B, idem eſt ac ſi dicam A. eſt æqualis B.*

2.

Nota $<$ *indicat majoritatem; quare ſi occurrat* $A < B$, *intellige A eſt major quam B.*

3.

Signum $>$ *minoritatem exprimit: quare* $A > B$ *ſignificabit A eſt minor quam B.*

4. *Nota*

4.

Nota + *vel plus ſignificat Additionem; adeoq. A + B, idem ſit ac A cum B, vel A & B ſimul; vel* B *ipſi A addendum eſſe.*

5.

Nota ÷ *ſeu minus ſubtractionem dicit: ut A ÷ B ſignificet A minus B: vel A dempta B: vel B ab A ſubtrahendum eſſe.*

6.

Si occurrat alicubi hæc formula.

A ∞ B. } A.
D ∞ C. }

A + D ∞ B + C.

intelligendum eſt ab una parte A & D debere addi, ut etiam ab altera parte C *addendum eſſe ipſi B: & tum priorem ſummam A + D eſſe æqualem poſteriori B +* C. *per Axioma ſcilicet primum.*

7.

Si vero ſeſe offerat talis deſignatio

A ꝏ B.) S
D ꝏ C.)

A ÷ D ꝏ B ÷ C.

illa ſignificabit ab una parte D ſubtrahi debere ab A, ut & ab altera parte C a B, & tum primum reſiduum A ÷ D poſteriori B ÷ C eſſe æquale.

8.

Eadem formula etiam non raro occurret applicata ſignis < & >. *hoc modo.*

A < B.) A.
D ꝏ C.)

A + D < B + C.

Vel.

A > B.) A.
D ꝏ C.)

A + D > B + C.

&

& tum intelligendum eſt poſt factam additionem ſummam $A+D$ *eſſe vel majorem in ſigno* $<$ *vel minorem in ſigno* $>$ *quam ſumma* $B+C$.

Nec aliter ſi loco) A occurrat) S vel S (denotabitur reſiduum A ÷ D *eſſe majus in ſigno* $<$ *vel minus in ſigno* $>$ *quam reſiduum* B ÷ C. *id quod ex numero 7 ſuum ducit fundamentum.*

9.

Si in materia proportionum ſe offerat.

A — B = C / D.

Vel in numeris

4 — 8 = 3 / 6.

denotat quantitatem A ſeſe habere ad B, ſicut C ſe habet ad D: vel numeram 4 ſe habere ad numerum 8, ſicut 3 ad 6: adeoque iſta quatuor eſſe proportionalia.

10.

Litera X cum duobus punctis utrinque notata hoc modo ·x· ſignificat multiplicationem: ut ſi occurrat A ·x· B, deſignat A per B multiplicandum eſſe, ut ita fiat rectangulum AB. Eodem modo 4 ·x· 8 *ſignificat* 4 *debere multiplicari per* 8*: quæ tamen multiplicatio non ſemper abſolvitur, ut clarius pateat ex quanam multiplicatione aliquod productum ſit generatum.*

11.

Nota □, *cujus omnia latera ſunt æqualia, ſignificat Quadratum: ut* □ *AB idem eſt ac Quadratum AB.*

12.

Nota ▭, *cujus latera ſunt inæqualia, denotat Parallelogrammum Rectangulum, vel ſimpliciter*

ter Rectangulum; ut ſi occurrat ▭ CD, idem erit ac Rectangulum CD.

13.

Nota √ *ſignificat radicem alicujus quantitatis; ut* √ *AB, denotat ex AB extrahandum eſſe radicem: ſimiliter* √ 12 *vult, ut ex* 12 *extrahatur radix, quæ non aliter quam per* √ 12 *deſignatur.*

14.

In demonſtrationibus non paucis quædam literæ occurrunt, infra ſe invicèm ſcriptæ, cum linea intermedia; quod ubique in genere ſignificat inferiora ſuperioribus eſſe æqualia; ac proinde inferiora in locum ſuperiorum eſſe ſubſtituenda ac uſurpanda: quemadmodum hoc in ſpecie etiam notavimus ad demonſtrationem Caſus 3. *Propoſit.* 35. *III. Id quod etiam in propoſ.* 36. *III. probe notandum.*

Si-

Similiter in Proportionibus hoc obſervandum eſt bene, quando una quantitas collocatur ſupra aliam: tunc inferiorem legendam eſſe pro ſuperiori, cum ſupponantur inter ſe æquales eſſe: Exemplo ſit demonſtratio propoſitionis 3, VI. quæ eſt pag. 411. quæ ſic habet.

$$\text{Tri. Z} - \overline{\text{Tri X}} = \text{AE} / \text{BC.}$$
$$\text{ſeu Y.}$$

dicendum eſt Triangulum Z ſe habet ad Triangulum X hoc eſt Triangulum Y: ſicut baſis AE ſe habet ad baſin BC.

15.

Pro citationibus marginalibus notandum primum numerum minorem ſignificare propoſitionem, ſecundum vero majorem denotare librum: ut 4. III. quantam propoſitionem Libri tertii dicit: & ſic porro in omnibus aliis.

EU-

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER PRIMUS.

CVm ſcientiæ nomen ſolummodo mereatur illa cognitio, quæ ex certis & indubitatis deducta principiis, omnem vel leviſſimæ dubitationis diſcutit nebulam; Mathematicæ procul dubio diſciplinæ maximo cum jure hoc ſibi vendicant nomen, Cum enim in aliis diſciplinis tam ſæpe de concluſionibus non aliam ob cauſam quam principiorum ambiguitatem contentionis ſerra reciprocetur; Mathematicæ vel ob hoc ſolum illis palmam præripiunt, quod concluſiones offerant, non ex veriſimilibus & aſſenſum emendicantibus, ſed ex ſimpliciſſimis & inconcuſſis deductas principiis. Quid enim certi-

tudini & veritatis propagationi magis contrarium, quam in alicujus materiæ pertractatione de varia & nunquam fere ſibi ſimili vocum ſignificatione ſæpius repetita diſputatio? Quid nos in majorem circa concluſiones dejicit fluctuationem, quam ſi illas ſuperſtruamus aſſertionibus aut temere aſſumtis, aut non probatis? quorum unum ſi contingat a veritate recedentes in turpiſſimum incidimus errorem; quod ſi vero alterius ſemitæ prementes veſtigia veritatem aſſequimur, non firmum noſtrum ratiocinium ſed caſum nos eo deduxiſſe certo certius exiſtimandum eſt.

A quo duplici vitio Mathematici ſeſe omnino præſtiterunt liberos, tum Definitionum ſuarum claritate omnem vocabulorum & terminorum, quos in demonſtrationum progreſſu adhibent, ambiguitatem tollendo; tum

tum præmiſſorum Axiomatum evidentia & naturali certitudine firmiſſimum demonſtrationibus ſubſtruendo fundamentum.

Hinc eſt quod ſtudia Mathematica, ex primis & ſimpliciſſimis emergentia principiis ad tam ſublime perfectionis faſtigium provecta cernere licet. Hinc eſt quod illæ ſcientiæ, quæ in ſuo initio & quaſi *nativitatis* momento humi repere & pulverem lambere videntur, relicta terra per aerem volitantes, ad ipſum Cœlum aſcendant, illiusque aliis inacceſſa arcana inconcuſſis calculi ſui ſubjiciant legibus.

Horum autem Principiorum, à quibus tota Matheſis ortum, progreſſum, omnemque qua eminet evidentiam acceptam referre debet, genera ſunt tria: Definitiones, Poſtulata, Axiomata.

DEFINITIONES.

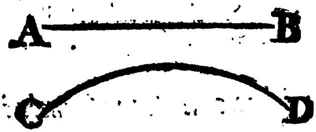
1. *Punctum eſt, cujus pars nulla.*

Facile concipimus tale punctum in rerum natura minime dari. Quicquid enim eſt, aut ad Spiritum refertur aut ad corpus: nemo autem facile ſibi perſuadebit ſcientias Mathematicas Spiritum aut res ſpirituales & omni materia carentes pro ſuo ſubjecto aſſumere, cum agat de corpore quatenus menſuram & ad alia corpora proportionem aliquam admittit: unde patet omne punctum quantumvis parvum concipiatur, pertinere ad corpus, eſſe ipſum corpus & æque ac corpus trinam admittere dimenſionem, ſc. longitudinem latitudinem & profunditatem: licet enim puncta poſſint occurrere adeo minuta, ut harum dimenſionum accurata diſtinctio vel intenſiſſimam ſenſuum fallat aciem, longius tamen patentem vim noſtrarum cogitationem non effugiunt, cum ſemper in illis deſtinguere liceat partem dextram a ſiniſtra, ſuperiorem ab inferiori.

Si vero ab illis punctis in noſtra cogi-

gitatione trinam iſtam dimenſionem abſtrahamus, eamque licet iſtis propriam & ſemper inhærentem, in illis non conſideremus, obtinemus puncta Mathematica, quæ ad ſenſum noſtrum relata acutiſſimæ acus impreſſo veſtigio aliquo modo deſignari poſſunt; in quo ſenſus dubium relinquunt, utrum longitudo latitudinem ſuperet nec ne, an vero latitudo longitudinem excedat: & utrum quælibet ex his profunditate ſit major.

2. *Linea vero longitudo latitudinis expers.*



Quemadmodum a parte rei non datur punctum omni prorſus dimenſione carens, ita nec datur linea longitudinis tantum capax: quare etiam per abſtractionem in linea unam tantum conſideramus dimenſionem ſecundum longitudinem, ſepoſita latitudine cum profunditate. Ad cujus conſiderationis imitationem in communi vitæ uſu ulnam re-

bus menſurandis ſolummodo applicamus ſecundum longitudinem, reliquis dimenſionibus in latitudinem & profunditatem neglectis.

Cæterum lineæ generationem hoc modo concipere licet. Si conſideremus punctum quoddam in aliquo loco conſtitutum inde moveri incipere; ita ut motus ſui viſibile relinquat veſtigium; illud nobis exhibebit lineam hoc modo generatam.

Quia autem illud punctum ab uno loco ad alium moveri poteſt vel per viam rectam vel per curvam, uti videre eſt in lineis A B. C D, inde oritur lineæ diviſio in Rectam vel Curvam.

3. *Lineæ autem termini ſunt puncta.*

Hoc facile intelligitur ex lineæ jam allata generatione; quod nimirum idem illud punctum quod in principio ſui motus erat in loco A vel C, in fine perveniat ac ſubſiſtat in loco B vel D.

4. *Linea recta eſt, quæ ex æquo ſua interjacet puncta.*

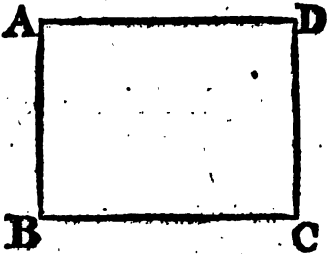
Vel

Vel cujus puncta extrema obumbrant omnia media,

Vel minima earum, quæ a puncto ad punctum duci poſſunt. Juxta Archimedem.

Ex quibus per definitiones contrarias facile innoteſcit quænam ſit Linea curva.

5. Superficies eſt quæ longitudinem latitudinemque tantum habet.



Sicut non datur punctum cum nulla, nec linea cum una tantum dimenſione, ſic etiam a parte rei non datur ſuperficies cum duabus, ſc. longitudine & latitudine tantum, ſecluſa profunditate, quæ idcirco noſtro tantum cogitandi modo a reliquis ſeparatur ac in corpore non conſideratur. Su-

Superficiei autem generationem hac ratione concipere poſſumus.

Cogitemus punctum A verſus partes inferiores motum deſcripſiſſe lineam rectam AB; deinde eandem lineam AB moveri incipere verſus partes dextras, donec linea AB perveniat ad locum DC. Patet iſto motu punctum A deſcripſiſſe lineam AD, & punctum B lineam BC; quemadmodum etiam omnia puncta intermedia lineæ AB ſuas lineas deſcripſiſſe concipiendum eſt: ut ex tali motu lineæ AB generata ſit Superficies ABCD.

6. *Superficiei autem extrema ſunt lineæ.*

Quod facile innoteſcit ex illis quæ circa ſuperficiei generationem modo dicta ſunt.

Quemadmodum autem antea pro diverſa motus via vidimus lineam generari aut Rectam aut curvam; eodem etiam modo per diverſum lineæ motum ſuperficies deſcribitur aut Recta ſeu Plana aut Curva.

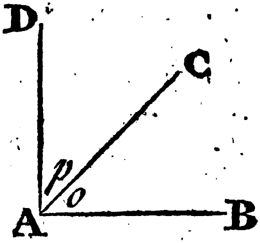
7 Pla-

7. *Plana ſuperficies eſt, quæ ex æquo ſuas interjacet rectas.*

Quæ antea de linea recta dicta ſunt, ſimiliter hic applicari poſſunt.

Hinc nullo negotio intelligitur quænam ſit ſuperficies curva.

8. *Planus autem angulus eſt duarum linearum in plano ſe mutuo tangentium & non indirectum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.*



Ad conſtituendum angulum planum ſeu angulum in ſuperficie, requiritur.

1. Ut duæ lineæ ſe mutuo tangant.

2. Ut non jaceant in directum, ſed una ad alteram inclinet.

Quemadmodum utramque hanc conditionem cernere licet in angulo CAB, ubi duæ lineæ AC. AB, ſe invicem tangentes in puncto A, non jacent in directum, ſed ad ſe mutuo inclinant.

Non autem pauciores nec plures duabus ad angulum planum exiguntur lineæ.

Non pauciores, quia ſi unica iſta linea dividatur in duas, duæ illæ ſibi jacebunt in directum; id quod repugnat ſecundæ conditioni.

Non plures, quia ex: gr: tertia AD, ſi cum reliquis in eodem ſit plano, non unum ſed duos faciet angulos DAC. CAB: ſi vero ſit extra planum reliquarum linearum, non angulum faciet planum, ſed ſolidum, cujus Definitionem Euclides libro XI. tradit.

Quia jam natura anguli plani conſiſtit in duarum linearum ad ſe invicem inclinatione, patet anguli alicujus quantitatem non conſiſtere in majori vel minori longitudine linearum: ſed tantum in illarum majori vel minori inclinatione; duæ enim lineæ majores eandem poſſunt habere inclinationem cum duabus minoribus,

bus, minime mutata anguli quantitate.

Deinde notandum Geometras ad deſignandum aliquem angulum tres adhibere literas, quarum media punctum denotat ad quod lineæ angulum continentes concurrunt. Ut ad denominandum angulum qui ad punctum A, conſtituitur à duabus lineis AC. AB. ſcribitur angulus CAB: vel ab altera parte angulus DAC eſt qui in puncto A fit a lineis AD. AC.

Nos autem brevitatis & perſpicuitatis gratia in ſequentibus non ſemel loco trium literarum angulo deſignando adhibemus unam ipſi inſcriptam.

Ut ad nominandum angulum DAC. efferemus angulum P. ſic etiam loco anguli CAB ſcribemus angulum O.

9. *Cum autem continentes angulum lineæ fuerint rectæ, rectilineus appellatur angulus.*

Accedit Euclides ad anguli diviſionem. Supra vidimus linearum duo eſſe genera, ſcilicet illas eſſe vel rectas, vel curvas.

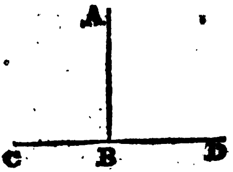
Quia autem illæ tribus diverſis modis poſſunt conjungi, ſc: vel recta cum re-

cta: vel recta cum curva; vel curva cum curva; hinc etiam tria oriuntur angulorum genera.

Primus quippe caſus ſuppeditat angulum rectilineum, cujus Definitionem hic tradit Euclides.

Secundus caſus nobis dat angulum mixtilineum, cujus mentionem factam videmus in Libro III. Tertius denique caſus conſtituit angulum curvilineum.

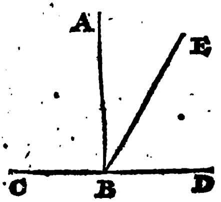
10. *Cum vero recta AB rectæ CD inſiſtens duos Angulos ABC. ABD æquales inter ſe facit; Rectus eſt uterque æqualium angulorum: & inſiſtens recta AB vocatur Perpendicularis lineæ CD. cui inſiſtit.*



Anguli ABC. ABD dicuntur recti, quia linea AB, ipſi CD ita directo ſitu in-

inſiſtit, ut ab una parte non magis inclinet verſus BC quam ab altera parte verſus BD;

11. *Obtuſus angulus EBC eſt, qui recto ABC major eſt.*



12. *Acutus vero EBD, qui recto ABD minor eſt.*

In tribus hiſce definitionibus Euclides tradit anguli rectilinei ſubdiviſionem petitam a triplici linearum inclinationis forma: quæ ab utraque parte vel eſt æqualis; vel ab una parte major altera; vel ab una parte minor altera: ut in Schemate videre eſt.

13. *Terminus eſt quod alicujus eſt extremum.*

Ut punctum lineæ: linea ſuperficiei: ſuperficies corporis.

14. *Figura plana eſt ſuperficies plana, una vel pluribus lineis undique terminata.*

Cum lineæ ſint vel rectæ vel curvæ, illæque tribus modis poſſint conjungi; figurarum planarum inde oriuntur tres ſpecies.

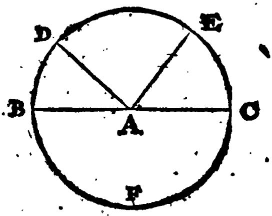
Curvilineæ, quæ vel una vel pluribus curvîs terminantur. Una terminatur circulus, cujus definitionem ſtatim tradit Euclides.

Mixtilineæ, quæ partim curvis partim rectis terminantur: huc pertinent ſemicirculus & ſegmentum Circuli.

Rectilineæ quæ ſolis rectis terminantur, quæ comprehendunt omnia polygona ſive regularia ſive irregularia.

15. *Circulus eſt figura plana ſub una linea curva DCF comprehenſa, quæ vocatur Peripheria: ad quam ab uno puncto A eorum quæ intra figuram ſunt poſita,*

ta, omnes cadentes rectæ AB. AD. AE. AC inter ſe æquales ſunt.



Proponit Euclides definitionem Circuli jam deſcripti, cujus delineationem & generationem hoc modo concipere poſſumus. Ducta ſit quælibet recta linea AB. cujus una extremitas A ponatur immota & affixa plano; altera vero extremitas B cum tota linea moveatur circa punctum A, per loca AD. AE. AC. AF, donec tandem redeat ad locum AB, unde moveri cœperat: iſta linea AB hâc circumductione deſcribet circulum BDECF.

Ex qua deſcriptionis forma patet omnes Radios cujuslibet Circuli eſſe inter ſe æquales: cum linea AB, cujus circumvolutio circulo ortum dedit, per omnia

omnia loca, AD. AE. AC & ſimilia tranſiit, adeoque punctum B fuit aliquando in punctis D. E. C. &c. adeoque lineæ AD. AE AC. ſunt æquales eidem lineæ AB.

Hinc jam etiam immediate ſequitur omnia puncta circumferentiæ DCFB æqualiter diſtare a puncto A.

16. *Illud autem punctum A centrum circuli dicitur.*

17. *Diameter Circuli eſt recta quædam BC per Centrum A ducta, & utrinque in punctis B.C. peripheriâ terminata; quæ & Circulum bifariam ſecat.*

Ut linea in Circulo ducta ſit Diameter duæ requiruntur conditiones.

I. Ut tranſeat per centrum.

II. Ut ab utraque parte terminetur in peripheria.

Adeoque omnis linea, harum nullam aut tantum unam habens conditionum, Diameter dici nullo modo poteſt.

Cæterum Diametrum circulum divide-

re biſariam patet ex eo quod tranſeat per Circuli punctum, quod ex omnibus medium eſt: quia ſcilicet eſt medium omnium Diametrorum quæ in Circulo duci poſſunt.

Sequitur jam ſecunda ſpecies figurarum, nempe mixtilineæ.

18. *Semicirculus autem BDE CAB eſt figura, quæ continetur ſub Diametro BC, & dimidia circumferentia BDEC.*

19. *Segmentum circuli eſt figura quæ continetur ſub qualibet recta circulo inſcripta & abſciſſa peripheria.*

Segmentum, excluſo ſemicirculo, eſt duplex, vel majus Semicirculo, vel minus.

Segmentum majus eſt illud in quo reperitur centrum.

Segmentum minus eſt illud quod centrum non continet.

Nunc Euclides aggreditur tertiam ſpeciem figurarum ſc; rectilinearum.

20. *Rectilineæ figuræ ſunt quæ ſub rectis lineis continentur.*

Diſtinguuntur autem rurſus hæ figuræ rectilineæ in tres ſpecies; vel enim ſunt Trilateræ; vel Quadrilateræ; vel Multilateræ.

21. *Trilateræ quidem figuræ ſunt, quæ ſub tribus.*

22. *Quadrilateræ vero quæ ſub quatuor.*

23. *Multilateræ denique quæ ſub pluribus quam quatuor rectis comprehenduntur.*

Generali vocabulo hæ dicuntur Multilateræ ad infinitam nominum evitandam multitudinem.

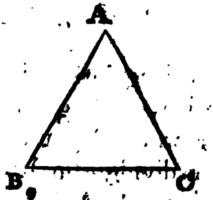
Jam cum figurarum rectilinearum primam ſpeciem conſtituant figuræ Trilateræ, ſeu vulgo ſic dicta Triangula, illorum diviſionem proponit Euclides, petitam ex conſideratione tum laterum, tum angulorum, quorum numerus (ut & in omnibus figuris rectilineis) eſt

æqua-

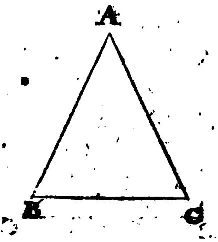
æqualis: quippe triangulum tot continet angulos quot latera.

Triangulum reſpectu laterum eſt triplex; Æquilaterum, Iſoſceles, & Scalenum.

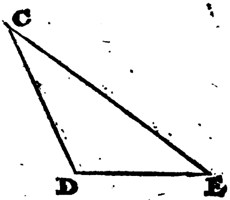
24. *Triangulum æquilaterum eſt, quod tria latera habet æqualia.*



25. *Iſoſceles autem, quod duo tantum habet æqualia AB, AC.*

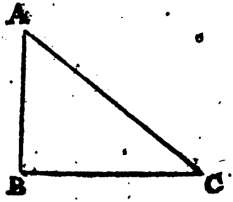


26. Scalenum denique quod tria inæqualia habet latera.



Secunda Triangulorum diviſio pro fundamento habet tres angulorum ſpecies; ſc: rectum, obtuſum & acutum; hinc enim Triangulum dividitur in Rectangulum, Obtuſangulum, & Acutangulum.

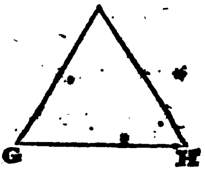
27. Triangulum rectangulum eſt, quod unum habet angulum rectum ABC.



28. Ob-

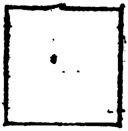
28. *Obtuſangulum eſt, quod unum habet angulum CDE obtuſum id eſt majorem recto.*

29. *Acutangulum denique quod tres angulos F. G. H. habet acutos, hoc eſt, minores recto.*

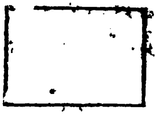


Sequitur jam ſecunda ſpecies figurarum rectilinearum: ſcilicet Figuræ Quadrilateræ, Hæ autem ab Euclide recenſentur quinque: Quadratum: Figura altera parte longior; Rhombus; Rhomboides; & Trapezia.

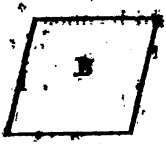
30. *Quadratum eſt, quod æquilaterum eſt & rectangulum.*



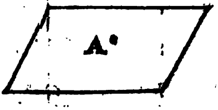
31. *Altera parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem, at æquilatera non eſt.*



32. *Rhombus autem, quæ æquilatera quidem, ſed rectangula non eſt.*

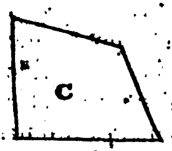


33. *Rhomboides eſt, quæ adverſa & latera & angulos æqualia inter ſe habens, neque æquilatera eſt, neque rectangula.*

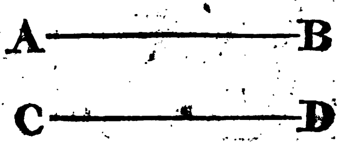


34. Tra-

34. *Trapezia denique dicuntur reliquæ figuræ quadrilateræ, quæ ad nullam ex quatuor præcedentibus referri poſſunt.*



35. *Rectæ lineæ parallelæ ſeu æquidiſtantes AB. CD ſunt, quæ in eodem plano exiſtentes, & utrinque in infinitum productæ, ad eandem diſtantiam a ſe invicem manent remotæ; ideoque nunquam concurrent.*

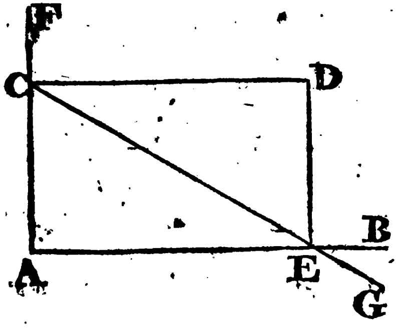


Non omnes lineæ, quæ nunquam concurrunt, parallelæ dicendæ ſunt; cum

cum dentur lineæ, quæ licet ſimul in infinitum producantur, ita ut ad ſe mutuo in infinitum magis ac magis accedant, nunquam tamen concurrent; ut Hyperbola & recta linea; Conchois & recta linea; Duæ æquales Parabolæ circa eandem Diametrum: quæ idcirco nequaquam dicendæ ſunt parallelæ.

Unde facile manifeſtum evadit ad naturam paralleliſmi neceſſario requiri æqualem ab omni parte diſtantiam: quam conditionem ab Euclide omiſſam nos cum celeberrimo Tacqueto adjecimus.

Cæterum linearum parallelarum, quas Euclides ut jam deſcriptas conſiderat, generationem & delineationem duobus modis concipere poſſumus.

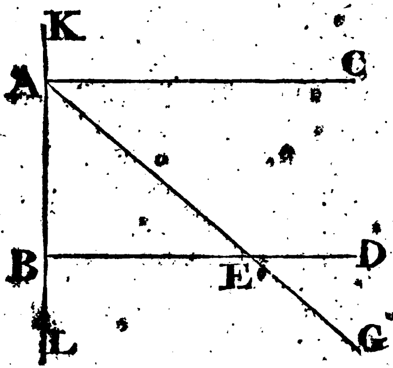


PRIMUS MODUS.

Ponamus lineam CA perpendiculariter inſiſtere lineæ AB, ut angulus CAB ſit rectus; deinde cogitemus lineam CA una ſuâ extremitate moveri ſuper lineam AB, ut ſemper ipſi maneat perpendicularis; ſi jam linea CA hoc ſuo motu pervenerit in DE, punctum C deſcriptam relinquet lineam CD, quæ nunquam poteſt magis recedere a linea AB, nec ad ipſam propius accedere, cum linea AC durante ſuo motu ſemper fuerit eadem & ſibi æqualis: adeoque linea CD in omnibus ſuis punctis manet cum AB in eadem diſtantia, & ſi iſte motus lineæ CA in infinitum duraret, etiam linea CD in infinitum ab AB diſtaret, adeoque nunquam cum illa concurreret: unde jam certo concludere licet lineam CD hoc modo generatam lineæ AB eſſe parallelam.

Deinde cum jam conſtet lineam CD non poſſe magis in uno puncto ad lineam AB accedere aut ab illa recedere quam in alio, ſequitur lineam CD ad lineas CF, CA habere æqualem inclinationem, adeoque per definitionem Per-

pendicularis angulum DCA eſſe rectum, & æqualem angulo CAB qui poſitus eſt rectus; adeoque duos angulos interiores ACD. CAB ſimul ſumtos eſſe æquales duobus rectis. Id quod natura parallelarum AB. CD hac ratione deſcriptarum omnino requirit.



SECUNDUS MODUS.

Ad lineæ KL punctum A concipiatur facta linea AC perpendicularis, quæ licet in infinitum producatur, nunquam inclinationem quam ad AK, AL habet (illa autem utrimque æqualis eſt) mutabit.

cum

cum anguli quantitas non in majori vel minori linearum longitudine, ſed in majori vel minori inclinatione conſiſtat.

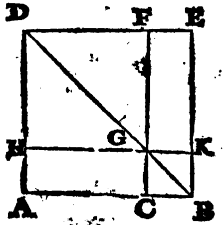
Deinde ex alio quovis puncto B cogitemus duci lineam perpendicularem BD, quæ etiam licet infinite protrahatur, nunquam aliam acquiret inclinationem ab illa quam jam habet ad lineas BK, BL.

Cum jam linea AC in infinitum producta non poſſit aſcendere verſus ſuperiora nec deſcendere verſus inferiora: ſimiliter linea BD etiam in infinitum continuata nec altiora nec demiſſiora petere poſſit; neceſſario ſequitur iſtas lineas AC. BD ſemper ſervaturas eandem a ſe invicem diſtantiam nec concurrere poſſe unquam; adeoque juxta hanc definitionem illas eſſe parallelas.

36. *Parallelogrammum eſt figura quadrilatera cujus bina oppoſita latera ſunt parallela ſeu æquidiſtantia.*

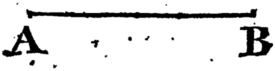
37. *Cum vero in parallelogrammo Diameter BD ducta fuerit, duæque rectæ CF. HK lateribus parallelæ ſecantes Diametrum in uno*

no eodemque puncto G, ita ut parallelogrammum diſtributum ſit in quatuor parallelogramma; illa per quæ Diameter non tranſit, ſcil: AG. GE. appellantur complementa eorum quæ circa Diametrum conſiſtunt, ut HF. CK.



POSTULATA.

1. *Poſtuletur a quovis puncto A ad quodvis punctum B rectam lineam AB ducere.*

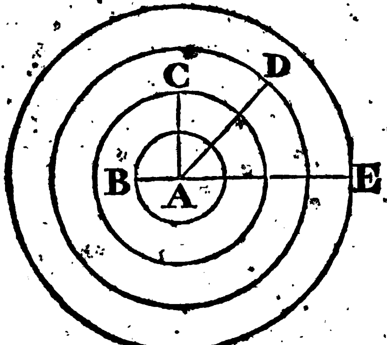


2. Et

2. *Et terminatam rectam AB in continuum recta producere in C.*



3. *Et quovis centro A & quolibet radio AB. AC. AD. AE. circulum deſcribere.*



AXIOMATA.

1. *Quæ ſunt eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia.*

2. *Si æqualibus æqualia addantur, tota erunt æqualia.*

3. *Si ab æqualibus æqualia demantur, reſidua manebunt æqualia.*

4. *Si inæqualibus æqualia adjecta ſint, tota ſunt inæqualia.*

5. *Si ab inæqualibus æqualia ablata ſint, reliqua ſunt inæqualia.*

6. *Et quæ ejuſdem ſunt duplicia, inter ſe ſunt æqualia.*

Idem intelligendum de triplicibus, quadruplicibus, quintupliicibus & ſic in infinitum.

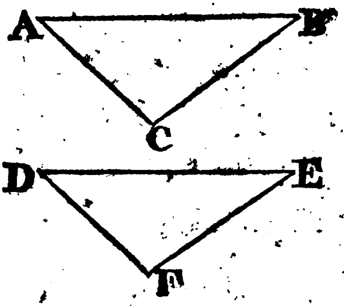
7. *Et quæ ejuſdem ſunt dimidia, inter ſe ſunt æqualia.*

Nec hoc axioma ſe tantum reſtringit ad partes dimidias; ſed etiam in tertiis, quartis, in quintis & ſic porro in infinitum ſuam habet veritatem.

8. *Quæ congruunt ſibi mutuo, inter ſe ſunt æqualia.*

Si primo concipiamus lineam DE ſuperimponi lineæ AB, ita ut puncta extrema D. A. ut & E. B. coincidant; ſimiliter omnia puncta intermedia lineæ DE correſpondeant omnibus mediis punctis lineæ AB, pro certo hinc aſſerere poſſumus lineam DE eſſe æqualem lineæ AB: quia omnes partes lineæ DE examuſſim conveniunt cum omnibus partibus lineæ AB.

Deinde



Deinde ſub qualibet inclinatione ad lineæ AB punctum A ducatur linea AC: ſi jam ad lineæ DE punctum D ducatur linea DF, ita ut inclinatio lineæ DF ad lineam DE, ſit æqualis vel ſimilis inclinationi lineæ AC ad lineam AB: & linea DF ſit æqualis lineæ AC: & tum angulus FDE ſuperimponatur angulo CAB, omnia correſpondebunt: ſcilicet linea DE cum AB, inclinatio cum inclinatione, & linea DF cum AC. Adeoque jam non tantum lineæ congruunt ſed & anguli.

Si denique ducatur recta CB, ut & FE, & una figura DEF imponatur alteri ABC: jam etiam tertium latus FE congruet cum tertio latere CB; adeo-

que

que totum triangulum DEF congruet triangulo ABC: unde neceſſario ſequitur unum alteri eſſe æquale.

9. *Totum ſua parte majus eſt.*

10. *Omnes anguli recti inter ſe ſunt æquales.*

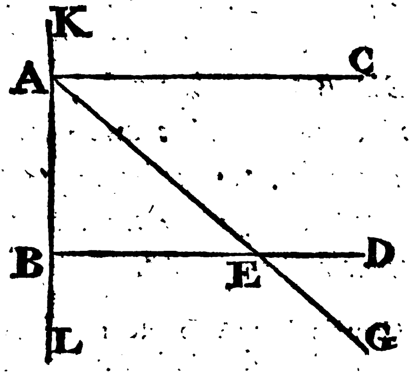
11. *Si in duas rectas AG. BD recta AB incidens interiores & ad eaſdem partes angulos ABD, BAG duobus rectis minores faciat; producta duæ illæ recta tandem coincident inter ſe ad eas partes, ubi ſunt iſti anguli duobus rectis minores.*

Cum in hoc Axiomate mentionem faciat Euclides duarum linearum coincidentiæ, & duorum interiorum angulorum, facili negotio patet illud aliquo modo reſpectum habere ad Definitionem linearum parallelarum ſuperius traditam: cumque in iſta definitione nec tertia li-

 nea

nea incidens, nec duo anguli interiores occurrant, fatendum ingenue erit, hujus Axiomatis lucem in primo intuitu non apparere tantam, quanta in præcedentibus ſtatim affulſit; imo quanta etiam in omnibus communibus ſententiis requiritur.

Quod ſi vero in memoriam revocemus ſupra allatos modos generationis parallelarum, putamus inde huic Axiomati multum affundi poſſe claritatis. Sumamus Ex: Gt: ſecundam.



Ibi quippe vidimus lineas parallelas AC: BD ex ſua natura & generationis modo requirere ut duo anguli CAB. DBA ſint recti, hoc eſt iſtius paralleliſmi non aliud eſſe fundamentum quam cum angulus unus

ABD

ABD ſit rectus; (quod ſemper ſupponimus) ut alter BAC etiam ſit rectus: adeoque ut linea AB perpendiculariter in lineam AC cadens etiam ſit perpendicularis ad alteram BD.

Si jam ex puncto A infra lineam AC ducatur alia quælibet ut AE; ita ut angulus BAE, ſit minor recto: illa neceſſario ſi producatur magis ac magis debet recedere ab AC: quia alias deberet aut eſſe parallela ipſi AC, aut iterum in alio puncto cum ipſa concurrere: non prius, quia habet punctum A commune adeoque in illo concidunt; non poſterius quia tum duæ rectæ ſpatium comprehenderent, quod repugnat Axiomi ſequenti.

Cum manifeſtum nunc ſit lineam AE magis ac magis recedere ab AC, etiam patet illud non poſſe fieri niſi illa magis ac magis appropinquet ad alteram parallelam BD; quod tamen in infinitum abſque concurſu fieri minime poſſibile eſt; ſi enim unius lineæ punctum A ab alterius lineæ puncto E ad quamlibet diſtantiam remotum eſſe concipiamus; & a puncto A verſus E ducere incipiamus lineam aliquam brevem; illa ſi producatur, adeoque ab AC magis ac magis recedat,

neceſſario ad punctum E magis ac magis accedet, donec tandem porro producta per illud punctum E tranſeat.

Si enim impoſſibile ſit ut per E tranſeat, e duobus unum verum eſt; aut a puncto A ad E non poſſe duci lineam rectam, quod repugnat poſtulato primo: aut lineam AE, ſi quam proxime ad punctum E pervenerit, aliorſum ſe determinare adeoque ſe flectere; quod non poteſt eſſe niſi ex recta fiat curva: quod tum eſt contra Hypotheſin.

Duæ tamen adhuc diſcutiendæ reſtant difficultates, quæ linearum AE, BD neceſſarium vacillare faciant concurſum.

Prima eſt, quod Hyperbola & recta, Conchois & recta, duæ Parabolæ æquales circa eandem diametrum, ſimul in infinitum productæ nunquam concurrant. Quæ tamen difficultas evaneſcit ſi conſideremus illas lineas eſſe extra genus linearum, de quibus agit Euclides in hoc Axiomate; expreſſe enim tantum loquitur de lineis rectis; cum Aſſymptoti ſint (ſaltem altera) ex lineis mixtis.

Altera difficultas oritur ex Clariſſimi Bettini duabus rectis (in Apiar. 5. & Ærario Tom. I. pag. 354.) quæ licet in-

ternos

ternos angulos duobus rectis minores efficiant; ſi producantur tamen nunquam coincidant.

Sed neci hoc noſtri Axiomatis evidentiam & veritatem labefactare poteſt. Cum iſtæ lineæ non ſimpliciter ſeu tanquam a puncto ad punctum, ſed cum certa quadam conditione, ſcilicet adjuncta proportione producantur. Quæ proportionalis linearum productio hic nullum omnino habet locum.

12. *Duæ rectæ ſpatium non comprehendunt.*

13. *Omne totum eſt æquale omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.*

Quoniam majoris perſpicuitatis gratia Mathematicis in more poſitum eſt, ut veritates quas demonſtrandas ſuſcipiunt, diſtinctis a ſe invicem complectantur propoſitionibus; notandum eſt haſce propoſitiones dividi in Problemata & Theoremata,

Problema eſt propoſitio in qua aliquid

proponitur efficiendum, & concluſionis formula ſemper talis eſt: Quod erat faciendum.

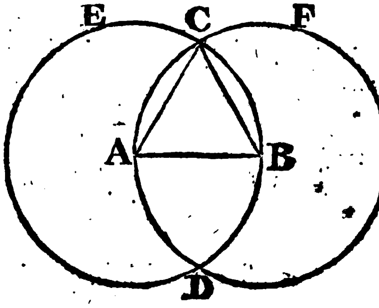
Theorema eſt propoſitio in qua proprietas quædam aut veritas de aliqua re jam facta & in figura jam conſtructa, proponitur demonſtranda & concluſionis formula ſemper eſt. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium eſt conſectarium quod ex facta jam demonſtratione tanquam lucrum aliquod colligitur.

Lemma eſt demonſtratio præmiſſæ alicujus, ut quæſiti demonſtratio clarior evadat & brevior.

PROPOSITIO. I.

Probl. I. *Super data recta terminata AB triangulum æqualaterum conſtituere.*



CON-

CONSTRUCTIO.

I. Centro A radio AB, [a] deſcribe circulum BCE. a Poſt. 3.

II. Centro B, eodem radio BA, [a] deſcribe circulum ACF.

3. Ex puncto interſectionis C [b] duc rectas CA. CB. b Poſt. 1.

Dico triangulum ABC eſſe æquilaterum.

DEMONSTRATIO.

AB ∞ AC.
BA ∞ BC. } c c Def. 15.

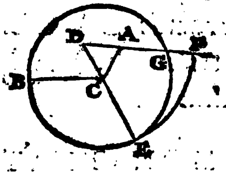
Ergo AC ∞ BC. d d Ax. 1.

Adeoque triangulum ABC eſt [e] æquilaterum. Quod erat faciendum. e Def. 24.

Pro-

PROPOSITIO. II.

Prob. 2. *Ad datum punctum A datæ rectæ BC æqualem rectam AF ponere.*



CONSTRUCTIO.

1. Ducatur a C ad A recta [a] CA. a Poſt. 1.

b 1. I. 2. Super CA [b] fiat triangulum æquilaterum CDA.

3. Centro C, radio CB deſcribe [c] circulum. c Poſt. 3.

d Poſt. 2. 4. Latus DC [d] produc uſque ad Circumferentiam in E.

e Poſt. 3. 5. Centro D radio DE [e] deſcribe arcum circuli EF.

6. De-

6. Denique latus DA [f] producuſque ad iſtum arcum in F. f Poſt. 2.

Dico lineam AF eſſe æqualem datæ BC.

DEMONSTRATIO.

S { DF ∞ DE. g. g Def. 15
S { DA ∞ DC. h. h Def. 24.

AF ∞ CE. i. i Ax. 2.

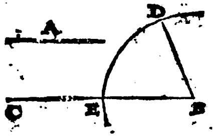
Atqui BC ∞ CE. k. k Def. 15.

Ergo AF ∞ BC. l. Q.E.F. l Ax. 1.

Probl. 3.

PROPOSITIO. III.

Datis duabus rectis inæqualibus A & BC; de majori BC minori A æqualem rectam BE detrahere.



CONSTUCTIO.

1. Ad lineæ CB extremitatem B, ſub quolibet angulo [a] pono rectam BD æqualem minori A.

a 2. 1.

b Poſt. 3.

2. Centro B, radio BD [b] deſcribo arcum circuli, ſecantem rectam CB in E.

Dico lineam BE eſſe æqualem ipſi A.

De-

DEMONSTRATIO.

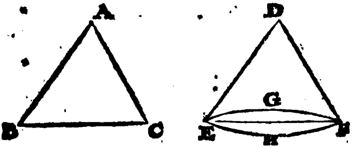
BE ∞ BD c. [c] Quia ſunt radii ejuſdem circuli. [c Def. 15.]

Atqui A ∞ BD d. [d] Per conſtructionem.

Ergo BE ∞ A. d. Q. E. F. [d Ax. 1.]

PROPOSITIO. IV.

Theor. I. *Si in triangulis ABC. DEF, unum latus AB, uni DE: & alterum AC alteri DF ſit æquale; ut & anguli A. D iſtis lateribus contenti ſint æquales: Erit quoque baſis BC æqualis EF; angulus B angulo E: ut & C ipſi F; Et triangulum ABC æquale triangulo DEF.*



DEMONSTRATIO.

Concipiamus Triangulum DEF ſuperimponi triangulo ABC, ita ut punctum E cadat in

in B, & latus ED ſuper BA; quandò punctum D præciſe cadet in A, quià latera AB & DE dantur æqualia. a

Deinde latus DF cadet ſuper AC, quia anguli BAC. EDF ponuntur æquales. a

Denique punctum F neceſſario cadet in C, quia latera AC. DF ſunt æqualia. a

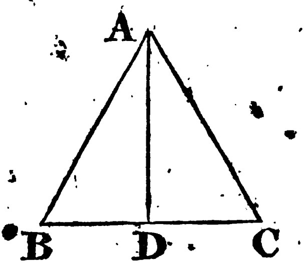
a Ax. 8.

Ergo punctum E idem erit cum B; & F cum C. Ergo linea EF congruet cum AC, adeoque ipſi erit æqualis: & omnes anguli congruent, ut & tota triangula: quare illa ſunt æqualia. a

Q. E. D.

PROPOSITIO V.

Theor. 2. *Iſoſcelis Trianguli ABC qui ad baſin ſunt anguli ABC. ACB inter ſe ſunt æquales.*



PRÆPARATIO.

Per prop: 9 ſequentem (quæ ab hac non dependet) angulum BAC divide bifariam recta linea AD.

D E-

DEMONSTATIO.

In Triangulis ADB. ADC.

Latus AB ∞ AC. per ipſum triangulum.

Latus AD, utrique commune adeoque ſibiipſi æquale.

Angulus BAD ∞ CAD per conſtructionem.

Ergo angulus ABD ∞ ACD. a Q. E. D. a 4. 1.

COROLLARIUM I.

Omne triangulum æquilaterum eſt æquiangulum.

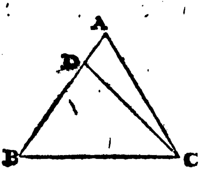
COROLLARIUM II.

Si in triangulo Iſoſcele vel æquilatero, ABC, linea AD biſecet angulum A, illa etiam oppoſitum latus BC bifariam dividet; ut & ipſi BC perpendicularis erit.

PRO-

Theor. 3.

PROPOSITIO. VI.



Si trianguli ABC, duo anguli ABC. ACB. inter ſe æquales fuerint; latera æqualibus angulis oppoſita AB. AC. etiam inter ſe erunt æqualia.

DEMONSTRATIO.

Aut eſt AB < AC.
Aut eſt AB > AC.
Aut eſt AB ꝏ AC.

Ponatur AB < AC.

Abſcindatur DB ꝏ AC, tum ducta DC. erit in △lis DBC. ACB.
Latus DB ꝏ AC. per conſtruct:
BC ꝏ BC. ſeu commune.
a 4. 1 Angulus DBC ꝏ ACB.

Ergo erit [a] △lum DBC ꝏ △lo ACB, ſc: pars & totum. Quod eſt abſurdum; adeoque non poteſt eſſe AB < AC.

Po-

Ponatur deinde $AB > AC$.

Nec hoc poſſe eſſe eodem modo probatur ab AC abſcindendo partem æqualem lateri AB.

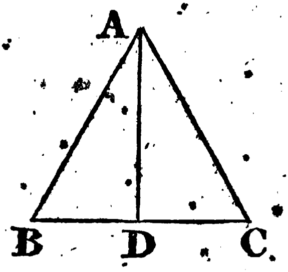
Adeoque cum nequeat eſſe $AB < AC$.

Nec $AB > AC$.

Neceſſario erit AB ∞ AC.

SCHOLIUM.

Non mius forſan quibuſdam arridebit demonſtratio quam inverſo parumper propoſitionum ordine hoc modo proponemus.



PRÆPARATIO.

Angulum *BAC*, ut ante divide biſariam recta *AD*.

DEMONSTRATIO.

In triangulis ADB. ADC,
Latus AD utrique commune ſibi ipſi eſt æquale.
Angulus B ꝏ C, per propoſitionem.
Angulus BAD ꝏ CAD per conſtructionem,

Ergo

Ergo per 26 ſequentem (quæ ab hac non dependet) Latus *AB* ∞ AC. Q. E. D.

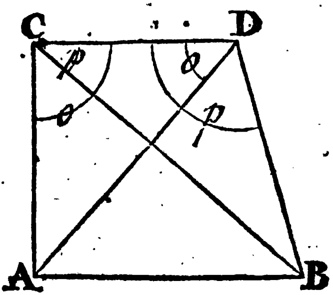
COROLLARIUM.

Omne Triangulum æquiangulum eſt æquilaterum.

PROPOSITIO. VII.

Theor. 4.

Si a lineæ AB extremitatibus A. B. ad datum aliquod punctum C ductæ fuerint duæ lineæ AC. BC. extra illud punctum C nullum datur aliud punctum, ad quod ab A & B duæ lineæ poſſint duci; quæ jam ductis lineis AC. BC ſint æquales.



De-

DEMONSTRATIO.

Si tale punctum contendat Adverſarius dari poſſe: dabitur vel extra vel intra triangulum ABC: vel in alterutro laterum.

Ponatur extra triangulum in D. Ductâ CD. erit in triangulo

ACD

Latus AC ∞ AD. juxta Adverſarium.

Ergo angulus ACD ∞ a ADC; qui eadem litera O inſigniantur. a 5. 1.

Deinde in triangulo BCD.

Latus BC ∞ BD. iterum juxta Adv.

Ergo angulus BCD ∞ a BDC qui eadem litera P notentur.

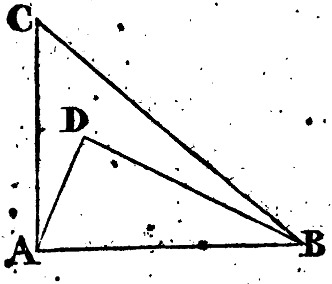
Jam angulus O, a parte ſiniſtra eſt major angulo P, a dextra vero minor; quod eſt abſurdum.

At-

Atqui eadem demonſtratio obtinet in omnibus punctis extra triangulum.

Ergo nullum omnino extra triangulum datur tale punctum.

Ponatur intra triangulum in D.



A { Latus AC ∞ AD } juxta Adverſarium.
Latus BC ∞ BD.

Ergo AC + CB ∞ AD + DB, contra ſequentem propoſ. 21. quæ ab hac non dependet.

Cum jam eadem demonſtrationis

tionis forma applicari poſſit omnibus punctis intra triangulum ABC.

Sequitur nullum tale punctum intra illud dari.

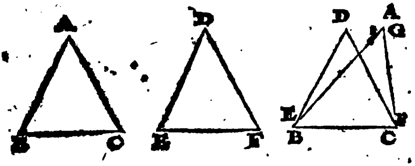
Ponatur in alterutro laterum AC. BC.

Nec ibi illud punctum poteſt inveniri, quia tum pars foret, æqualis ſuo toti contra AX. 9.

Ergo univerſim concludimus extra punctum C nullum omnino aliud dari poſſe, ad quod duæ lineæ æquales ipſis AC. BC duci queant. Q. E. D.

PROPOSITIO VIII.

Theor. 5. *Si duo triangula ABC. DEF duo latera AB. AC. duobus lateribus DE. DF. æqualia habeant, alterum alteri: & baſin BC æqualem baſi EF. Illa etiam angulum A angulo D æqualem habebunt, ſub æqualibus rectis contentum.*



DEMONSTRATIO.

Triangulum ABC ſuperponatur ipſi DEF, ita ut baſis BC congruat baſi EF, tum

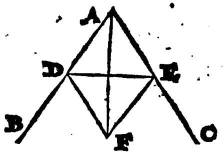
pun-

punctum A cadet in D. & latera AB. AC congruent lateribus DE. EF. item angulus BAC congruet angulo EDF. Ergo [a] erunt anguli æquales. [a] Ax. 8.

Quod ſi vero Adverſarius contendat punctum A cadere extra D; tum ſequeretur extra punctum D, dari aliud punctum, ad quod ab extremitatibus E. F. lineæ duæ poſſent duci quæ ipſis ED. FD jam ductis eſſent æquales: quod eſt abſurdum. [b] [b] 7. 1.

PROPOSITIO IX.

Prob. 4. *Datum angulum rectilineum BAC biſa-riam ſecare.*



CONSTRUCTIO.

1. Ex lateribus *AB*, *AC* abſcinde a 3.1. [a] partes æquales *AD*. *AE*.

b 1.1. 2. Super ducta *DE* conſtitue [b] triangulum æquilaterum *DEF*.

3 Duc rectam *AF*.

Dico illam bifariam dividere angulum *BAC*.

DEMONSTRATIO.

In Triangulis *ADF AEF*.

Latus *AD* ∞ *AE* } per conſtructionem:
Latus *DF* ∞ *EF*
Latus *AF* ∞ *AF*, quia utrique commune.

c 8.1. Ergo angulus *DAF* ∞ [c] *EAF*. Q. E. F

CO-

COROLLARIUM.

Hinc patet methodus datum angulum ſecandi in æquales angulos 4. 8. 16. etc. ſingulas nimirum partes iterum biſariam dividendo.

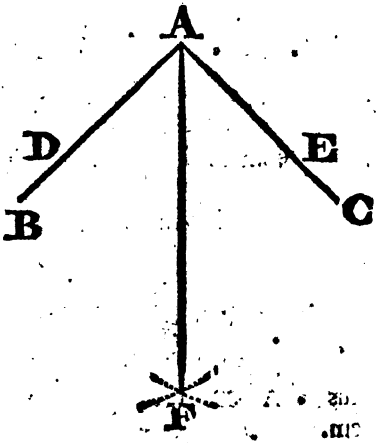
SCHOLIUM.

Poteſt autem propoſitionis conſtructio hoc modò in compendium redigi.

I. *In lateribus AB. AC. ſume æquales AD. AE.*

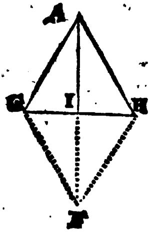
II. *Centris D & E, quolibetumque radio deſcribe duos arcus ſe interſecantes in F.*

Quo facto recta AF angulum BAC biſecabit.



PROPOSITIO X.

Probl. 5. *Datam rectam terminatam GH bifariam ſecare.*



CONSTRUCTIO.

a 1.1. 1. Super data GH conſtitue [a] triangulum æquilaterum GAH.

b 9.1. 2. Angulum A divide bifariam [b] recta AF.

Dico illam lineam GH dividere bifariam.

DEMONSTRATIO.

In Triangulis AIG. AIH.

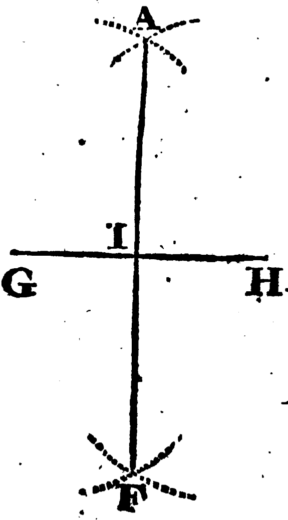
Latus GA ∞ HA. per conſtructionem.

Latus AI ꝏ AI, ſeu utrique commune.

Angulus GAI ꝏ HAI. per conſtructionem.

Ergo [c] Baſis GI ꝏ IH: adeoque linea GH ſecta eſt biſariam. Q. E. F. c 4.

SCOLIUM.



Hujus operationis etiam tale eſt compendium.

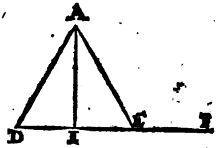
Centris G & H, æquali radio utrinque deſcribantur arcus ſe interſecantes in A & F.

Tum recta AF, biſecabit rectam GH in I.

Notandum etiam pro ſequenti propoſitione rectam AF eſſe perpendicularem ipſi GH ex puncto dato I utrimque excitatam.

PROPOSITIO XI.

P.1l. 6. *Data recta DF a puncto I in ea dato perpendicularem IAexcitare.*



CONSTRUCTIO.

a 3. 1 A puncto I utrinque ſume [a] partes inter ſe æquales ID. IE.

b 1. 2. Super tota DE conſtitue [b] triangulum æquilaterum DAE.

3. Duc rectam AI.

Dico illam eſſe perpendicularem quæſitam.

DEMONSTRATIO.

In triangulis AID. AIE.

Latus AD ∞ AE. } per conſtructionem.
Latus ID ∞ IE.
Latus AI ∞ AI.

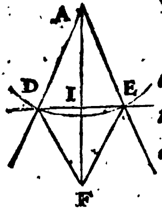
---

a 8. 1. Ergo Angulus AID ∞ [a] AIE. Adeoque AI eſt quæſita [b] perpendicularis.

b Def9. Q. E. F.

PRO-

PROPOSITIO XII.



Ex dato puncto A extra lineam DE, ad ipſam lineam perpendicularem ducere. Probl.

CONSTRUCTIO.

1. Centro A tali radio deſcribe [a] circulum ut rectam datam ſecet in duobus punctis D. E. a Poſt.

2. Duc [b] rectas *AD. AE.* b Poſt.

3. Lineam DE [c] divide bifariam in puncto I. c 10. I

Dico ductam AI eſſe quæſitam perpendicularem.

DEMONSTRATIO.

In Triangulis AID. AIE.

Latus AD ∞ AE. quia ſunt radii ejuſdem circuli.

Latus ID ∞ IE. per conſtructionem.

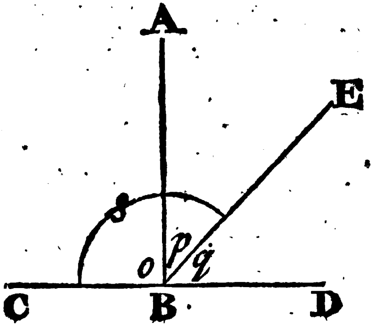
Latus AI ∞ AI.

Ergo angulus AID ∞ [d] AIE. Ergo AI eſt quæſita [e] perpendicularis. Q. E. F. d 8. I. e Def. 10

PRO-

PROPOSITIO. XIII.

Theor. 6. *Cum recta linea EB ſupra rectam CD conſiſtens, angulos facit: aut duos [a] rectos aut duobus rectis æquales efficiet.*



DEMONSTRATIO.

Recta EB cum DC aut facit utrimque æquales, adeoque [a] duos rectos; aut non facit.

Def. 10.

Si

Si non facit, ex puncto B excitetur [b] perpendicularis BA: eruntque duo anguli O & P + Q ſinguli recti adeoque b 11. 1

O + P + Q ∞ 2 R.

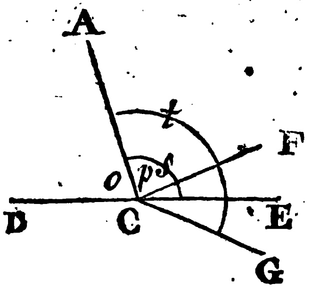
Atqui ang. S ∞ O + P.

Ergo S + Q ∞ 2 Rectis.

Quod E. D.

PROPOSITIO. XIV.

Theor. 7. *Si ad alicujus rectæ AC punctum C duæ rectæ DC. CE non ad eaſdem partes ductæ angulos qui ſunt deinceps O & S duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt iſtæ rectæ, hoc eſt DCE erit una recta linea.*



DEMONSTRATIO.

Si Adverſarius contendat lineam CE cum CD non facere unam lineam rectam, utique aliam aſſignare nobis debet; illa autem aſſignabitur vel ſupra lineam CE vel infra illam.

Sit primo ſupra CE. ut CF.

Jam anguli O + P ∞ 2 Rectis.

juxta

juxta Adverſarium.
Atqui anguli O + S ∞ 2 R. per propoſitionem.

Ergo [a] O + P ∞ O + S. Et demto utrinque angulo O remanet [b] P ∞ S. Pars & totum quod eſt abſurdum [c]. a Ax. 1. b Ax. 2. c Ax. 9.

Et eadem demonſtratio habet locum in omnibus lineis quæ poſſunt duci ſupra CE. Ergo nulla poteſt duci linea ſupra CE, quæ cum CD faciat lineam rectam.

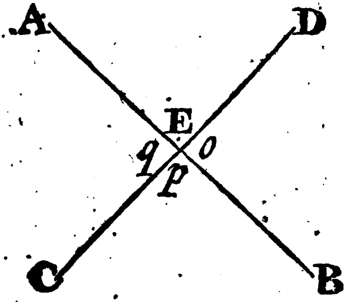
Sit deinde infra CE. ut CG.
Tum anguli O + T ∞ 2 Rectis. juxta Adverſarium.
Atqui O + S ∞ 2 R. per propoſitionem.

Ergo [d] O + T ∞ O + S. Et ablato utrinque angulo O remanet T ∞ S. Totum & Pars. quod [e] eſt abſurdum. d Ax. 1. e Ax. 9.

Et cum eadem demonſtrationis forma obtineat in omnibus lineis quæ poſſint duci infra CE: ſequitur etiam nullam infra CE poſſe duci: quæ cum CD facit lineam rectam. Unde concludendum erit ipſam lineam CE cum CD facere rectam DCE. Q. E. D.

PROPOSITIO. XV.

Theor. 8. *Si duæ rectæ AB. CD ſe invicem ſecent, angulos ad verticem & oppoſitos, ſcilicet E & P æquales inter ſe facient.*



DEMONSTRATIO.

a 13. 1. Anguli $E + O \infty 2 R.$ Anguli $P + O \infty 2 R.$ [a]

b Ax. 1. Ergo[b] $E + O \infty P + O.$
ablato utrimque O.

c Ax. 3. E [c] ∞ $P.$

Co-

COROLLARIUM. I.

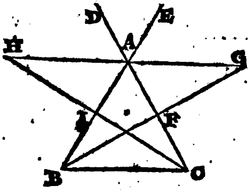
Duæ rectæ ſecantes ſe mutuo ad punctum interſectionis quatuor angulos faciunt quatuor rectis æquales.

COROLLARIUM. II.

Omnes anguli circa idem punctum conſtituti æquales ſunt quatuor rectis.

PROPOSITIO. XVI.

Theor. 9. *Trianguli ABC uno latere BA producto in E, externus angulus EAC utrolibet interno & oppoſito C vel B major eſt.*



PRÆPARATIO.

a 10. 1. 1. Latus A C biſecetur in F. [a]

b Poſt. 1. & 2. 2. Ducta BF producatur [b] in G, ut BF ſit ∞ FG.

3. Ducatur AG.

DEMONSTRATIO.

Jam in triangulis BFC- AFG.

La-

Latus	BF	∞	FG	Per con-
Latus	CF	∞	AF	ſtructio-
				nem.

Angulus BFC ∞ AFG. per 15. I.

Ergo ang. FCB ∞ FAG. per 4. 1.

Atqui totalis EAC externus major FAG.

Ergo idem EAC etiam major FCB. ſ. C.

Eodem modo biſecando latus AB procedatur, & probabitur angulum externum DAB majorem eſſe angulo ABC.

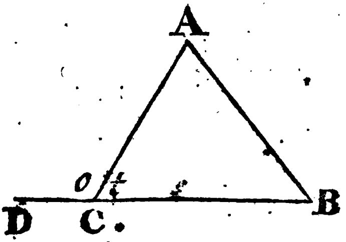
Atqui angulus DAB ∞ EAC. 15. I.

Ergo EAC etiam eſt major quam ABC. ſ. B.

Q. E. D.

PROPOSITIO XVII.

Theor. 10. *Trianguli ABC duo anguli B. T. vel alii quilibet; quocunque modo ſimul ſumpti, duobus rectis ſunt minores.*



DEMONSTRATIO.

Producto latere BC in D.

Duo anguli O + T ∞ 2 R. 13. I.

Atqui O < B. 16. I.

Ergo B + T > 2 Re.

Simili modo demonſtratur an-

angulos A + T eſſe minores ſeu >. duobus Rectis.

COROLLARIUM. I.

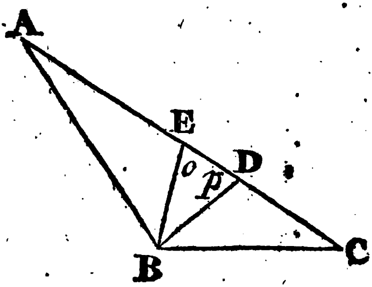
In omni triangulo cujus unus angulus fuerit rectus vel obtuſus, reliqui ſunt acuti.

COROLLARIUM II.

Omnes anguli trianguli æquilateri; & trianguli Iſoſcelis anguli ſupra baſim ſunt acuti.

PROPOSITIO. XVIII.

Theor. 11. *Omnis Trianguli ABC maximo lateri AC opponitur maximus angulus ABC.*



DEMONSTRATIO.

Angulus ABC eſt $<$ C.

A majori latere AC abſcindatur AD ∞ AB.

a 5. 1. Ergo angulus ABD ∞ P. [a]

b 16. 1. Atqui P $<$ C. [b]

Ergo ABD $<$ C.

Adeo-

Adeoque totalis ABC erit multo ⋖ C.

Angulus ABC eſt ⋖ A.

A maximo latere AC abſcindatur CE ∞ CB.

Eritque angulus EBC ∞ O.[c] c 5. 1.

Atqui O ⋖ A.[d] d 16. 1.

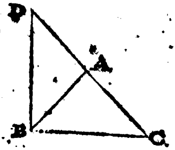
Ergo EBC ⋖ A.

Ergo totalis ABC erit multo ⋖ A.

Unde jam patet angulum ABC eſſe omnium maximum. Q. E. D.

PROPOSITIO. XX.

Theor. 13. *Trianguli ABC duo latera ſcil. AB. AC. aut alio quocunque modo ſimul ſumpta reliquo BC ſunt majora.*



PRÆPARATIO.

1. Latus AC producatur in D et fit AD ꝏ AB.
2. Ducatur DB.

DEMONSTRATIO.

In Triangulo DAB. latus AD. ꝏ AB per conſtruct.

Ergo angulus ABD ꝏ D.

Atqui angulus CBD < ABD.

Ergo angulus CBD etiam < D.

Adeo-

Adeoque latus DC. hoc eſt duo latera BA + AC. ſunt [a] majora tertio latere BC. Q. E. D. [a] 19. 1.

SCHOLIUM.

Propoſitionis hujus veritas immediate fluit ex Archimedæa lineæ Rectæ definitione; Ad oculum enim patet viam per quam linea fracta BAC a B ad C ducta eſt diverſam eſſe, a via lineæ BC, quæ ſtatuitur recta.

Ergo linea recta BC eſt omnium minima, quæ a B ad C poteſt duci.

Adeoque etiam linea recta BC erit > linea fracta BAC.

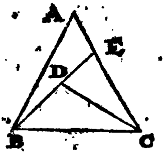
Q. E. D.

Pro-

PROPOSITIO XXI.

Theor. 14.

Si a terminis unius lateris BC intra triangulum jungantur duæ rectæ BD. CD: hæ lateribus trianguli BA. AC minores quidem erunt; majorem vero angulum BDC. continebunt.



DEMONSTRATIO.

PARS I.

Producta BD in E. erit in triangulo BAE,

a 20. I. A { BA + AE < BE.
EC ∞ EC.

---

b Ax. 4. BA + AC < BE + EC.

Deinde in Triangulo DEC.

c 20. I. A { DE + EC < DC. c
BD ∞ BD.

BE

$BE + EC < BD + DC$.[d] d Ax. 4.

Atqui ſupra $BA + AC < BE + EC$.

Ergo $BA + AC$ multo $< BD + DC$.

PARS II.

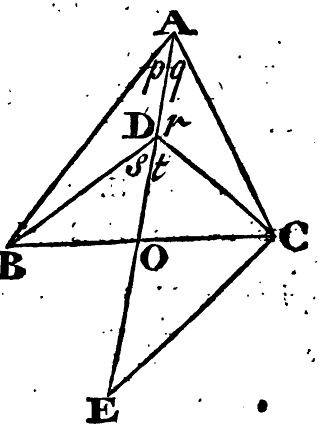
Externus angulus $BDC < DEC$ interno. e 16. 1.

Atqui angulus $DEC < A$ interno.[f] f 16. 1.

Ergo angulus BDC multo $< A$.

Q.E.D.

Alia DEMONSTRATIO.



PARS I. Duc rectam ADO.
In triang. ADC ang. R < Q.
In triang. ADB ang. D < P.

Ergo per 19. I.
Latus AC < DC. }A
Latus BA < BD. }

Latera BA ⊣⊢ AC < BD ⊣⊢ DC.

Quod autem angulus R ſit < Q ſic patet. Producatur AO in E, ut fiat CE ꝏ CA. Triang.
a 5. I. ACE eſt Iſoſceles. Ergo ang. Q ꝏ E *a* Atqui externus R < interno E *b* Ergo R < Q. Similiter
b 16. I. probatur eſſe D < P.

PARS 2.

A { Ang. S < P
c 16. I. { Ang. T < Q c

Ergo

Ergo $S + T < P + Q$.
Hoc $BDC < BAC$.

Vel aliter hoc modo.

Pars I.

Per Archimedæam rectæ lineæ definitionem linea BOC eſt omnium breviſſima, quæ a B duci poſſunt ad C. Ergo ſi a B ad C per aliam viam ducatur linea ſive incurvata ſive fracta, ut BAC, vel BDC. neceſſario illa via erit major. Patet autem ad oculum quo punctum fractionis magis a linea BEC recedat, eo viam per quam iſta linea procedet eſſe etiam longiorem, adeoque etiam lineam eſſe majorem.

Atqui punctum fractionis A magis a linea BOC recedit quam D. Ergo linea BAC erit major linea BDC.

Pars II.

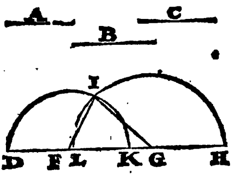
Per propoſit 32. 1. (quæ ab hac non dependet.)

Omnes anguli triang. DBC ∞ omnibus ang. trian. ABC.
Atqui ang. $DBC + DCB >$ ang. $ABC + ACB$. } S

Remanebit angulus $BDC < BAC$.

PROPOSITIO XXII.

Probl. 8. *Ex datis tribus rectis A. B. C. quarum duæ quælibet tertia ſunt majores, Triangulum conſtituere.*



CONSTRUCTIO.

1. In infinita linea DH, lineis datis A. B. C. ſume æquales DF. FG. GH.

2. Centro F & radio FD deſcribe Circulum DI, & centro G radio GH circulum HI.

3. Ex puncto interſectionis I, ducantur rectæ IF. IG.

Dico

Dico FIG eſſe triangulum quæſitum.

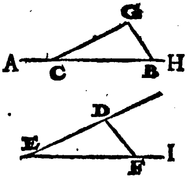
DEMONSTRATIO.

FI ∞ [a] DF ∞ A. } Per con- [a] Def. 15.
FG ∞ B. } ſtructio-
GI ∞ [b] GH ∞ C. } nem. [b] Def. 15.

Q. E. F.

PROPOSITIO XXIII.

Probl. 9. *Ad datæ rectæ AB punctum C angulo rectilineo DEF æqualem GCB efficere.*



1. In rectis *ED. EI* ſume duo puncta D. F. illaque junge recta linea DF.

a 22. 1. 2. Tum [a] fiat ad punctum C triangulum GCB, habens latera æqualia lateribus trianguli EDF.

Dico angulum GCB eſſe æqualem ipſi DEF.

De-

DEMONSTRATIO.

In triangulis GCB. DEF.

Latus GC ∞ DE | Per con-
Latus CB ∞ EF | ſtr ctio-
Latus BG ∞ FD | nem.

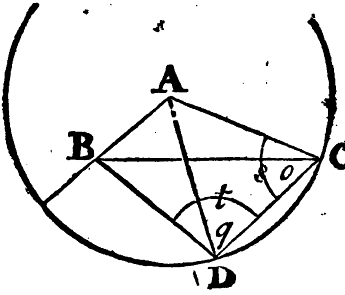
Ergo [b] angulus GCB ∞ DEF. b 8. 1.

Q. E. F.

Pro-

PROPOSITIO. XXIV.

Theor. 15. *Si duo triangula BAC. BAD duo latera BA. AC duobus BA AD æqualia habuerint. alterum alteri unum vero triangulum habeat angulum iſtis lateribus contentum BAC majorem altero BAD; habebit quoque baſin BC majorem baſi BD.*



PRÆPARATIO.

1. Centro A per C deſcribe cir-

circulum, is tranſibit per D, cum AC. AD ponuntur æquales: Et BC cadit ſupra D.

2. Ducatur recta DC.

DEMONSTRATIO.

In Triangulo ADC. latus AD ponitur æquale AC. ergo angulus S ꝏ Q.

Atqui S ⋖ O.

Ergo Q ⋖ O.

Adeoque T multo ⋖ O.

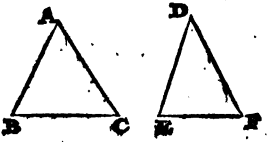
Quare cum in triangulo BCD angulus T ſit ⋖ O erit latus ſeu Baſis BC major [a] baſi BD. a 19. I.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXV.

Theor. 16.

Si duo triangula ABC. DEF duo latera AB, AC duobus lateribus DE. DF æqualia habuerint alterum alteri; unum vero triangulum habeat baſin BC majorem altera EF: habebit quoque angulum A majorem D.



DEMONSTRATIO.

Si angulus A non ſit $\lessdot$ D.
Erit vel A ∞ D.
vel A $>$ D.

Si

Si ſit A ∞ D, erit baſis [a] BC ∞ EF. contra hypotheſin. a 4. 1.

Si vero A > D erit [b] baſis BC > EF. iterum contra hyp. b 24. 1.

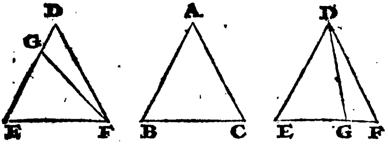
Adeoque ſequitur eſſe angulum A < D.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXVI.

Theor. 17.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, ſive quod adjacet æqualibus angulis, ſive quod uni æqualium angulorum ſubtenditur; Illa & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo.



DEMONSTRATIO,

In Triangulis ABC. DEF ſint anguli B. E. ut & C, F, æquales.

Sitque primo BC ∞ EF, ſc: laterá adjacentia.

ſi DE non ſit ∞ ipſi AB; ſit DE < AB, & abſcindatur EG ∞ AB, & ducatur GF.

Tum erit in Triangulis GEF, ABC.
Latus GE ∞ AB per conſtructionem.
Angulus E ∞ B } Per propoſitionem.
Latus EF ∞ BC }

a 4. I. Ergo a angulus GFE ∞ ACB,
Atqui angulus DFE ∞ ACB per propoſitionem.

b Ax. I. Ergo b angulus GFE ∞ DFE, pars & totum, quod eſt c abſurdum.
c Ax. 9.

Ergo

Ergo non poteſt eſſe DE < AB,

Et eodem modo probatur DE non poſſe eſſe minus latere AB:

Ergo DE ∝ AB, adeoque triangula ABC, DEF ſe habent juxta 4. Et omnia reliqua ſunt æqualia.

Sit deinde AB ∝ DE, ſcilicet latera oppoſita,

Si non ſit EF ∝ BC, ſit EF < BC, & abſcindatur EG ∝ BC, ducaturque DG.

Tum erit in triangulis ABC, DEG.

Latus AB ∝ DE } per propoſitionem.
Angulus B ∝ E }
Latus BC ∝ EG per conſtruct:

Ergo d Angulus ACB ∝ DGE.
Atqui angulus ACB ∝ DFE per propoſitionem. d 4. 1.

Ergo angulus DGE ∝ DFE, quod eſt abſurdum, cum DGE ſit externus, qui interno DFE major eſt. e — e 16. 1.

Ergo non poteſt eſſe EF < BC.

Eodem modo probabitur non poſſe eſſe EF > BC.

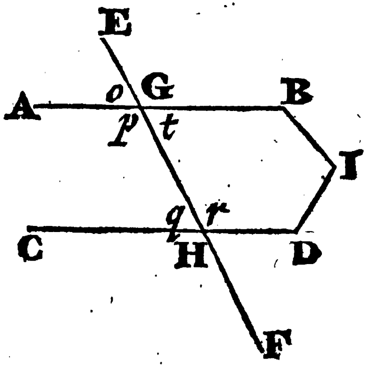
Unde ſequitur eſſe EF ∝ BC: Adeoque in tringulis ABC, DEF omnia per 4 eſſe æqualia.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXVII.

Theor. 18.

Si in duas rectas AB. CD recta EF incidens angulos alternos P. R æquales faciat; rectæ erunt inter ſe parallelæ.



DEMONSTRATIO.

Si non ſint parallelæ, coin-
dent

cident puta in *I*, & fiet triangulum *GIH*.

Tum erit angulus externus *P* < *R* interno. a 16. 1.

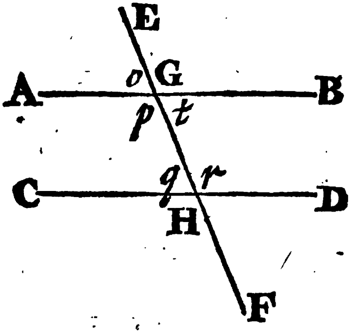
Atqui per propoſ. angulus *P* ∞ *R*.

Quæ duo ſimul vera eſſe abſurdum eſt. Ergo lineæ non concurrent; adeoque ſunt parallelæ.

PROPOSITIO XXVIII.

Theor. 19.

Si in duas rectas AB. CD recta EF incidens faciat externum angulum O æqualem interno & ad eaſdem partes oppoſito Q: Aut ſi faciat duos internos, & ad eaſdem partes P. Q. ſimul æquales duobus rectis: parallelæ erunt inter ſe rectæ AB. CD.



DE-

DEMONSTRATIO.

PARS I.

Angulus T ꝏ O.[a] a 15. I.
Atqui Q ꝏ O per propoſitionem.

Ergo T ꝏ Q.[b] b Ax. 1.
Adeoque lineæ AB. CD. ſunt parallelæ.[c] c 27. I.

PARS II.

Anguli O + P ꝏ 2 Rectis.[d] d 13. I.
Atqui Q + P ꝏ 2 Rectis per Prop.

Ergo[e] O + P ꝏ Q + P. demto utrinque P. e Ax. I.

O ꝏ Q.

Ergo per partem primam hujus lineæ AB. CD ſunt parallelæ.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXIX.

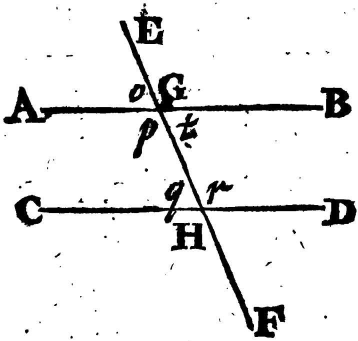
Theor. 20.

Si in rectas parallelas AB. CD recta EF incidat.

1. *Alterni anguli T. Q inter ſe erunt æquales.*

2. *Externus G erit æqualis interno & ad eaſdem partes oppoſito R.*

3. *Duo interni & ad eaſdem partes T. R. ſimul ernnt æquales duobus rectis.*



De-

DEMONSTRATIO.

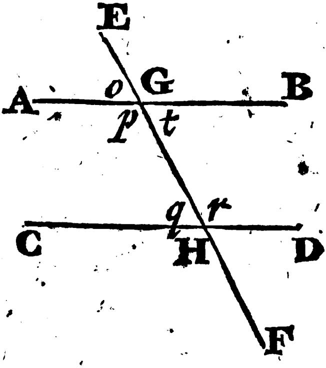
Pars I.

Si angulus T non ſit $\propto$ Q, erit vel major vel minor.

Ponatur $\left.\begin{array}{lll} T & < & Q. \\ P & & P. \end{array}\right) A$

Erit [a] $T + P < Q. + P.$ a Ax. 4.
Atqui $T + P \propto$ [b] 2 Rectis. b 13. I.

Ergo $Q + P > 2$ Rectis: adeoque lineæ AB. CD non ſunt [c] parallelæ: quod eſt contra hypotheſin. c Ax. 11.



Deinde ponatur $T > Q$.
ſeu $Q < T$.
R. R.

$Q + R < T + R$.
d 13. 1. Atqui $Q + R$ ∞ 2 Rectis. d

Ergo $T + R > 2$ Rectis:
e Ax. 11. adeoque duæ lineæ e AB CD
non

non ſunt parallelæ: quod iterum eſt contra Hypotheſin.

Ergo eſt angulus T ∞ *Q*.

Quod E. D.

PARS II.

G + T ∞ 2 Rectis. } f
R + *Q* ∞ 2 Rectis. } f — f 13. I.

S { Ergo G + T ∞ R + *Q*. g — g Ax. I.
S { Atqui T ∞ *Q*. h — h per partem I.

Ergo G ∞ R. i — i Ax. 3.

PARS III.

G + T ∞ 2 Rectis. k — k 13. I.
Atqui G ∞ R. l — l Per partem 2.

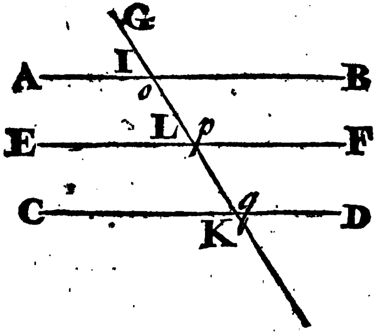
Ergo *R* + T ∞ 2 Rectis.

Q. D. E.

PROPOSITIO. XXX.

Theor. 21.

Si duæ rectæ AB. CD. ſint parallelæ ad eandem EF; illæ erunt quoque inter ſe parallelæ.



DEMONSTRATIO.

Ducatur per tres datas rectas linea GK.

An-

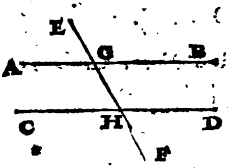
Angulus O ∞ P. [a] propter parallelas AB. EF. a 29. I.

Angulus Q ∞ P. [b] propter parallelas CD. EF.

Ergo ang. O ∞ Q alterni. Adeoque AB. CD ſunt [b] inter ſe parallelæ. b 27. I.

PROPOSITIO XXXI.

Prob. 10. *Per datum punctum G ducere lineam AB, quæ datæ CD ſit parallela.*



CONSTRUCTIO.

1. Ex puncto G ad datam CD duc rectam GH ſub quolibet angulo *GHC*.

2. Ad lineæ GH punctum G fac [a] angulum HGB æqualem angulo *GHC*.

a 23. 1.

Dico

Dico BG productam eſſe ipſi *CD* parallelam.

DEMONSTRATIO.

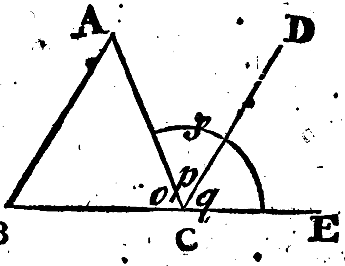
Anguli alterni *GH*, *HGB* ſunt æquales per conſtructionem. Ergo [b] lineæ *AB*. *CD*. ſunt parallelæ. b 27. 1.

PROPOSITIO XXXII.

Theor. 22. *Trianguli ABC uno latere BC producto in E.*

1. *Externus angulus S duobus internis & oppoſitis A & B. æqualis eſt.*

2. *Trianguli tres anguli A. B. O. ſimul ſumpti duobus rectis æquales ſunt.*



De

DEMONSTRATIO.

PARS I.

Ducta recta CD parallela lateri BA, erit.

A { Angulus P ∞ [a] A, alterno; propter incidentem AC. a 29. I.
Angulus Q ∞ [b] B. interno; propter incidentem BE. b 29. I.

Ergo anguli P + Q hoc eſt totalis S ∞. A + B. Q. E. D.

PARS 2.

Duo anguli O + S ∞ 2 Rectis. [c] c 13. I.
Atqui S ∞ A + B. per partem I.

Ergo tres anguli A + B + O ∞ 2 Rectis.

COROLLARIUM I.

Omnes anguli unius triauguli ſunt æquales tribus angulis cujuſcunque alterius trianguli ſimul ſumtis; Et quando duo ſunt æquales duobus erit & tertius æqualis tertio.

COROLLARIUM II.

In triangulo Iſoſcele rectangulo anguli ad baſin ſunt ſemirecti. Et quadrati diameter illius angulos biſariam ſecat.

COROLLARIUM III.

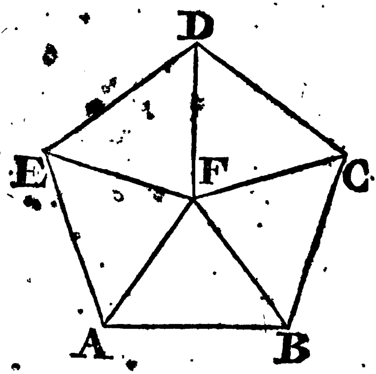
Angulus trianguli æquilateri eſt una tertia duorum rectorum, vel duæ tertiæ unius recti.

SCHOLIUM.

Omnis figura rectilinea dividitur in tot triangula, quot habet latera, demptis duobus, & anguli triangulorum conſtituunt angulos figuræ.

DE-

DEMONSTRATIO.



Intra quodlibet polygonum ex: gr: pentagonum ABCDE, ſumatur aliquod punctum F, ex quo ad ſingulos angulos ducantur rectæ; & obtinebuntur tot triangula quot figura habet latera, adeoque hic quinque triangula.

Cum autem unumquodque triangulum contineat duos angulos rectos (per 32. I.) quinque triangula continebunt 10 angulos rectos; a quibus ſi demantur anguli recti quatuor circa F poſiti (15. I.) qui ad figuram non pertinent, remanebunt pro angulis figuræ 6 anguli recti.

Cum jam duo anguli recti contineantur in uno triangulo, 4 erunt in duobus & 6 in tribus triangulis.

Un,

Unde jam concludimus pentagonum dividi poſſe in tria triangula: hoc eſt in tot triangula, quot figura habet latera demptis duobus.

Quæ demonſtratio univerſalis eſt pro omnibus polygonis; & Tabellæ ſequentis eſt fundamentum.

Latera	3	4	5	6	7
Trianguli	1	2	3	4	5
Anguli recti	2	4	6	8	10

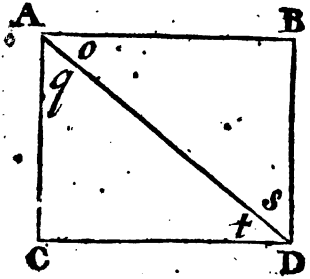
Latera	8	9	10	11	12
Trianguli	6	7	8	9	10
Anguli recti	12	14	16	18	20

Cujus hic eſt Senſus. Figura Ex: Gr: 6 laterum, dividi poteſt in 4 triangula; & illius anguli omnes valent 8 rectos.

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

Rectæ AC. BD quæ æquales & paralelas AB. CD ad eaſdem partes conjungunt, illæ & ipſæ æquales ſunt & parallelæ. Theor. 23.



DEMONSTRATIO.

Ducta Diametro AD, in Triangulis BAD. ADC.

Latus AB ꝏ CD per propoſitionem.

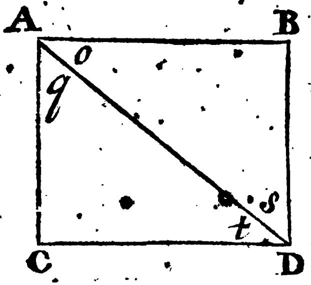
Angulus a O ꝏ T propter a 29. 1. pa-

parallelas AB. CD.
Latus AD ∞ AD.

Ergo per 4. omnia ſunt æqualia, nim.
Latus AC ∞ BD.
Angulus Q ∞ S, adeoque
b 27. 1. [b] AC & BD parallelæ.

Pro-

PROPOSITIO XXXIV.



Theor. 24.

Parallelogrammi, ABCD oppoſita latera & anguli æqualia ſunt; ipſumque a Diametro ſecatur bifariam.

DEMONSTRATIO.

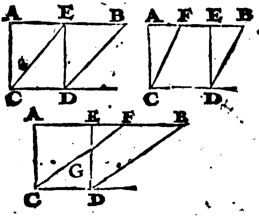
In Triangulis BAD. ADC.
Angulus a O ∞ T propter parallelas a 29. 1.
AB. CD.
Angulus a S ∞ Q propter parallelas
AC. BD.
Latus AD ∞ AD.

Ergo per 26. omnia ſunt æqualia; ſc:
Latus AB ∞ CD.
Latus BD ∞ AC.
Angulus B ∞ C.
Adeoque per 4. Triangula BAD. ADC inter ſe ſunt æqualia.

PROPOSITIO. XXXV.

Theor. 25.

Parallelogramma AD. FD. ſuper eadem baſi CD & inter eaſdem parallelas AB. CD conſtituta ſunt æqualia.



DEMONSTRATIO.

Tres hic occurrunt caſus, qui totidem figuris exhibentur.

Ad Figuram I.

Latus AE ∞ CD
Latus EB ∞ CD } 34. I.

Ergo

Ergo AE [a] ∞ EB. a Ax. I.

Conſiderentur, jam duo triangula EAC. BED, in quibus

Latus EA ∞ BE.
Angulus A ∞ BED propter parallelas AC. ED.
Latus AC ∞ ED per 34. I.

Ergo Triang. [b] EAC ∞ Triang. BED } Adde. b 4. I.
Triang. ECD ∞ ECD.

Parallelogr. EACD ∞ Parall. BECD.

Ad Figuram. II.

Latus AE ∞ CD.
Latus FB ∞ CD. 34. I.

Ergo AE ∞ FB. } S.
FE FE.

AF ∞ EB.

Quare jam in Triangulis FAC. BED.

Latus FA ∞ BE.

Angulus A ∞ BED. propter parallelas AC. ED.

Latus AC ∞ ED. per 34. I.

---

c4. I. Ergo Triang. FAC ∞ BED.
Trap. EFCD. ∞ EFCD } A

Parallelog. AD ∞ Parall. FD.

Ad Figuram III.

Latus AE ∞ CD.
Latus FB ∞ CD. } 34. I.

Ergo AE ∞ FB.
EF. EF. } A.

AF ∞ EB.

Quare iterum in triangulis FAC. BED.

Latus FA ∞ BE.

Angulus A. ∞ BED. ob parallelas AC. ED.

Latus AC ∞ ED. per 34. I.

Ergo

Ergo [d] Triang. FAC ∞ Triang. BED.
Triang. FEG ∞ Triang. FEG. } S. — d 4. 1.

Trapezium EACG ∞ Trapezio BFGD.
Triang. GCD GCD } A.

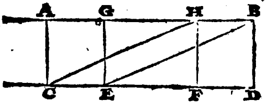
Parallelogr. AD ∞ Parallel. ED.
Q. E. D.

Pro-

PROPOSITIO XXXVI.

Theor. 26.

Parallelogramma AE. HD ſuper æqualibus baſibus CE. FD, & inter eaſdem parallelas AB CD conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.



DEMONSTRATIO.

Ducantur rectæ CH. EB, quæ erunt
a 33. 1. a æquales & parallelæ. Hoc facto erit.

Parallelogr. AE ∞ Parall. EH.
Atqui Parall. HD ∞ eidem Parall: EH. } 35. 1.

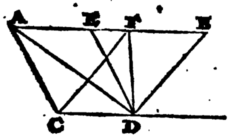
b Ax. 1. Ergo b Parall. AE ∞ Parall. HD.

Q. E. D.

Pro-

PROPOSITIO XXXVII.

Triangula ACD. FCD ſuper eadem baſi CD & inter eaſdem parallelas AB. CD. conſtituta, ſunt inter ſe æqualia. Theor. 27.



DEMONSTRATIO.

Ductis DE [a] parallela ipſi CA: ut & DB parallela CF, erit. a 31. I. b 35. I.

Parallelogr. [b] EC ∞ Parallelogr. BC.

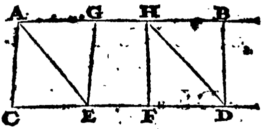
Atqui Parall. EC ſemiſſis eſt Triangulum ACD.
Et Parallelogr. BC ſemiſſis eſt triangulum FCD. } 34. I.

Ergo [c] triang. ACD ∞ triang. FCD. c Ax. 7.
Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII.

Theor. 28. *Triangula ACE. HFD ſuper æqualibus baſibus CE. FD. & inter eaſdem parallelas AB. CD conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.*



DEMONSTRATIO.

a 31. I. Ducatur [a] EG parallela ipſi AC & DB ipſi FH.
b 24. I. Tum [b] Parall. CG ∞ Parall. FB.

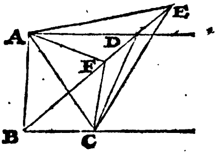
At-

Atqui dimidium CG eſt Triang. ACE.
Et dimidium FB eſt Triang. HFD. | 34. I.

Ergo c triang. ACE ∝ triang. HFD. c 24. 7.

PROPOSITIO XXXIX.

Theor. 29. *Si triangula ABC. DBC ſint æqualia, & ſuper eadem baſi BC & ad eaſdem partes conſtituta: illa erunt quoque inter eaſdem parallelas. Hoc eſt AD erit parallela BC.*



DEMONSTRATIO.

Si Adverſarius hoc neget. Sit AE parallela ipſi BC : & producta BD in E, ducatur recta EC.

a 37. I. Tum Triang. [a] ABC ∞ EBC.
Atqui Triang. ABC ∞ DBC per propoſitionem.

Er-

Ergo Triang. [b] EBC ∞ DBC. To-tum & pars quod eſt abſurdum. b Ax. 1.

c Ax. 9.

Et eadem demonſtratio obtinet in omnibus lineis quæ poſſunt duci ſupra AD.

Quare concludendum eſt nullam lineam poſſe duci ſupra AD, quæ ſit ipſi BC parallela.

Quod ſi adverſarius contendat lineam AF eſſe parallelam BC, eadem demonſtrationis forma ipſum ad abſurdum deducimus; & probabimus nullam lineam infra AD poſſe duci quæ ipſi BC ſit parallela.

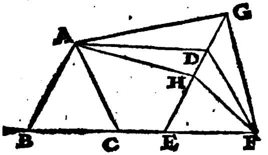
Ergo recte hinc concludimus ipſam lineam AD eſſe parallelam BC.

Q. E. D.

PROPOSITIO XL.

Theor. 30.

Si triangula ABC. DEF ſint æqualia, & ſuper æqualibus baſibus BC. EF, & ad eaſdem partes conſtituta: Illa erunt quoque inter eaſdem parallelas AD. BF.



DEMONSTRATIO.

Si AD juxta Adverſarium non ſit parallela BF; ſit AG ſupra AD ducta, ipſi BF parallela: & producta ED in G, ducatur GF.

a 38. I. Tum erit [a] triang. ABC ∞ triang. GEF.

Atqui idem triang. ABC ∞ triang. DEF. per prop.

Ergo

Ergo [b] triang. GEF ∞ DEF. Totum & pars; quod eſt [c] abſurdum. b Ax. I. c Ax. 9.

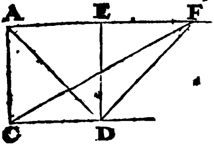
Adeoque linea AG non eſt parallela BF: nec ulla quæ ſupra AD poſſet duci.

Et eodem modo demonſtratur nec AH nec ullam aliam quæ infra AD poſſit duci, eſſe parallelam ipſi BF.

Ergo concludimus iterum ipſam lineam AD eſſe parallelam BF. Q. E. D.

PROPOSITIO XLI.

Theor. 31.



Si parallelogrammum AECD communem cum triangulo FCD baſin CD habuerit, & in iiſdem parallelis AF. CD fuerit: parallelogrammum erit duplum trianguli.

DEMONSTRATIO.

a 37. I. Ducta AD erit triang. [a] ACD ∞ triang. FCD.

b 34. I. Atqui [b] parallelogr. AECD eſt duplum triang. ACD.

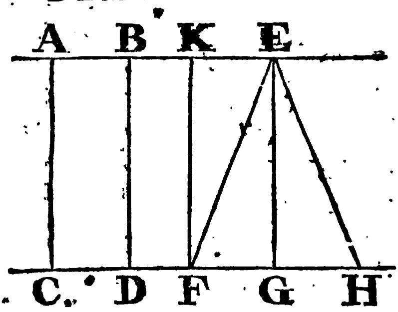
Ergo etiam parall. AECD eſt duplum triang. FCD.

SCHOLIUM.

Imo etiam ſi parallelogrammum ABDC cum triangulo EFG æquales baſes CD. FG. habuerit & in iiſdem fuerit parallelis, * parallelog. trianguli duplum erit.

De-

DEMONSTRATIO.



Ducta FK parellela GE, erit.

Parallelog. AD ∞ Parall. KG. 36. I.

Atqui Parall. KG eſt duplum Trianguli EFG. per 34. I.

Ergo etiam Parall. AD ejuſdem trianguli duplum erit.

Præterea ſi Trianguli EFH cum Parallelogr. AD inter eaſdem parallelas exiſtentis, baſis FH fuerit dupla baſeos CD erit triangulum EFH ∞ parallegr. AD.

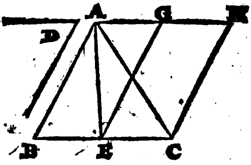
DEMONSTRATIO.

Triang. EFG ∞ triang. EHG (38. I.) Ergo totum triangulum EFH eſt duplum trianguli EFG: atqui modo demonſtratum eſt eſſe parallegr. AD duplum ejuſdem trianguli EFG. Ergo erit parall. AD ∞ triang. EFG.

PRO

PROPOSITIO XLII.

Prob. 11.



Dato triangulo ABC æquale parallelogrammum GC conſtruere, habens angulum æqualem angulo dato D.

CONSTRUCTIO.

a 10. I. 1. Divide [a] baſin BC bifariam in E, & duc rectam AE.

b 31. I. 2. Duc lineam AH parallelam BC.

3. Ex E duc rectam EG ut angulus GEC ſit æqualis angulo dato D.

4. Age CH parallelam EG.

Dico GC eſſe parallelogrammum quæſitum.

DEMONSTRATIO.

a 38. I. Triang. AEB ∞ triang. AEC.

Ergo triang. ABC eſt duplum triang. AEC

b 41. I. Atqui Parall. GC [b] eſt duplum ejuſdem triang. AEC.

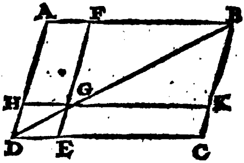
---

c Ax. 6. Ergo triang. ABC ∞ Parall. GC. c

Cum jam angulus GEC per conſtructionem ſit ∞ angulo dato D; patet factum eſſe quod quæritur.

PROPOSITIO. XLIII.

Omnis parallelogrammi AC Theor. 32.
complementa AG. GC. ſunt inter ſe æqualia.



DEMONSTRATIO.

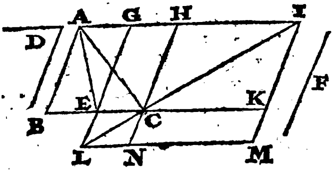
S (Triang. BAD ꝏ Triang. BCD.
Triang. BFG + GHD ꝏ tri. BKG + GED) 34. I.

Remanet complem. AG ꝏ [a]compl. GC. Q. E. D. a Ax. 3.

R Pro-

PROPOSITIO XLIV.

Prob. 12.



Ad datam rectam F dato triangulo ABC æquale parallelogrammum CM applicare habens angulum æqualem angulo dato D.

CONSTRUCTIO.

a 42. 1. 1. Conſtitue [a] parallelogrammum CG æquale triangulo ABC, & habens angulum GEC ∞ angulo D.

b 3. 1. 2. Produc [b] BC in K, ut CK ſit ∞ datæ F.

c 31. 1. 3. Age KI parallelam [c] CH, quæ productæ AH occurrat in I.

4. Ex I per C ducatur IC. quæ productæ GE occurrat in L.

5 Ducatur LM parallela BK, quæ productæ IK occurrat in M.

6. Denique producatur HC in N.

Dico CM eſſe parallelogrammum quæſitum.

De-

DEMONSTRATIO.

Triang. ABC ∞ complemento GC. per Conſtr.

Compl. CM [a] ∞ eidem compl. GC. — a 43. I.

Ergo triang. ABC [b] ∞ compl. CM. — b Ax. I.

Angulum autem CNM eſſe ∞ angulo dato D ſic demonſtratur.

Ang. CNM [c] ∞ HCK. propter parallelas CK. NM. — c 29. I.

Ang. HCK ∞ [c] GEC. propter parallelas HC. GE.

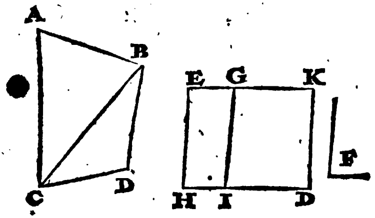
Ang. GEC ∞ D. per conſtructionem.

Ergo ang. CNM ∞ D. [d] — d Ax. I.

Cum jam denique latus CK factum ſit æquale lineæ datæ F, patet parallelogrammum CM quæſito ſatisfacere.

PROPOSITIO XLV.

Prob. 13. *Dato rectilineo AD æquale parallelogrammum ED conſtituere habens angulum æqualem angulo dato F.*



CONSTRUCTIO.

1. Ducta CB dividatur rectilineum in triangula.

a 42. 1. 2. Fiat [a] parallelogrammum EI ∞ triangulo BCD, habens angulum H ∞ dato F.

3. Su-

3. Supra latus GI [b] fiat parallelogrammum GD ꝏ triangulo ABC, habens angulum GID ꝏ ipſi H. b 44. 1.

Dico quæſito ſatisfactum eſſe.

DEMONSTRATIO.

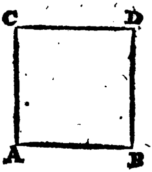
A { Parallelogr. EI ꝏ triang. BCD.
Parallelogr. GD ꝏ triang. ABC. } per conſt.

Ergo Parall. ED ꝏ Rectilineo AD.

Q. E. F.

PROPOSITIO. XLVI.

Prob. 14. *Super data recta AB quadratum ABDC deſcribere.*



CONSTRUCTIO.

1. Ab extremitatibus A & B erige duas perpendiculares a 11. 1. ª AC. BD. quæ ſint æquales ipſi AB.

2. Ducatur recta CD.

Dico ABCD eſſe quadratum quæſitum.

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus.

a Ax. 1. Latus AC ª ∞ BD, quia utrim-

trumque eſt ∞ eidem AB.

Latus AC eſt parallelum [b] BD, propter angulos rectos. [b 28. 1.]
A. B.

Ergo [c] AB & CD ſunt parallelæ & æquales, adeoque omnia latera æqualia eidem *AB*, inter-ſe ſunt æqualia & parallela. [c 33. 1.]

Pro angulis.

In parallelogrammo AD anguli A. *B*. ſunt recti. Ergo [d] etiam oppoſiti D. C ſunt recti. Ergo *ABDC* eſt quadratum. [d 34. 1.]

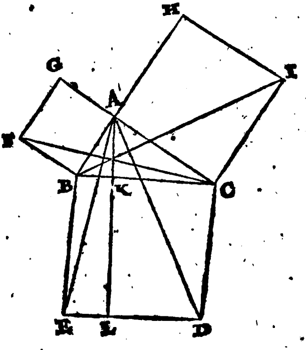
Q. E. D.

Pro-

PROPOSITIO XLVII.

Theor. 33.

In omni triangulo rectangulo BAC quadratum lateris BC, quod recto angulo opponitur, æquale eſt duobus ſimul reliquorum laterum BA. AC. quadratis.



DEMONSTRATIO.

Ex A ducta AL parallela lateri BE, lateris BC quadratum BD dividit

dividit in duo parallelogramma *B*L. KD:

Si jam demonſtratum ſit Parallelogr. *KD* eſſe ∞ quadrato AI, ut & parallelogr. *BL* eſſe ∞ quadrato *AF*, peracta res erit.

Pro Primo.

Ductis AD. BI { ang. BCD ∞ ACI. quia uterque rectus.
A { ang. ACB. ∞ ACB.

Ang. ACD ∞ BCI.

Ergo in triangulis ACD. BCI.

Latus AC ∞ CI. } quia ſunt latera eorundem quadratorum.
Latus CD ∞ BC. }
Ang. ACD ∞ BCI.

Ergo [a] Triang. ACD triang. BCI. a 4. I.

[c] Atqui parallelogr. KD eſt duplum triang. ACD. } Quia ſunt in iiſdem baſibus & parallelis. c 41. I.
[c] Et parallelegr. AI duplum triang. BCI. }

b Ax. 6.] Ergo [b] parall. KD ∞ parall. ſeu quadrato AI.

Pro Secundo.

Ductis AE. CF. A (Ang. CBE ∞ ABF. quia uterque rectus. Ang. ABC. ABC.

Ang. ABE. ∞ CBF.

Quare in triangulis ABE. CBF.

Latus AB ∞ BF. \ Utpote latera eorundem quadratorum.
Latus BE ∞ CB. /
Ang. ABE ∞ CBF.

---

d 4. 1. Ergo Triang. ABE [d] ∞ Triang. CBF.

e 41. 1. [e] Atqui parallelogr. BL eſt duplum triang. ABE. [e] Et parallelogr. AF duplum triang. CBF. | Quia ſunt in iiſdem baſibus & parallelis.

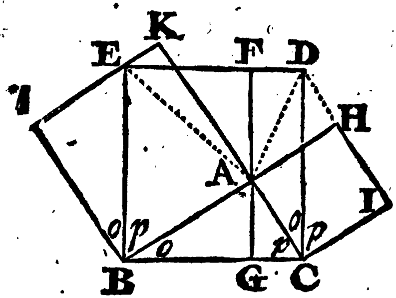
Ergo

Ergo parall. BL ∞ parall. ſeu quadrato AF. f Ax. 6.
Atqui antea parall *KD* ∞ quadrato AI. } A

Ergo Quadratum B*D* ∞ duobus quadratis AF. AI.

Q. E. D.

Succinctior autem & clarior eſt Clariſſimi Sturmii demonſtratio, quam in ſua Matheſi enucleata, pag. 30. hoc modo proponit.



Factis faciendis, quæ appoſita Figura monſtrat.

▭ FDCG duplum eſt △li ACD.
Atqui □ AHIC etiam eſt duplum △li ACD. } 41. I.

Ergo ▭ FDCG ∞ □ AHIC.

Eodem modò.

▭ FEBG duplum eſt △li AEB.
Atqui □ ABLK etiam eſt duplum △li ACD. } 41. I.

Ergo

Ergo ▭ FEBG ꝏ □ ABLK.⎫ Adde.
Supra eſt ▭ FDCG ꝏ □ AHIG.⎭

Eritque □ EDCB ꝏ □ ABLK + □ AHIC. Q. E. D.

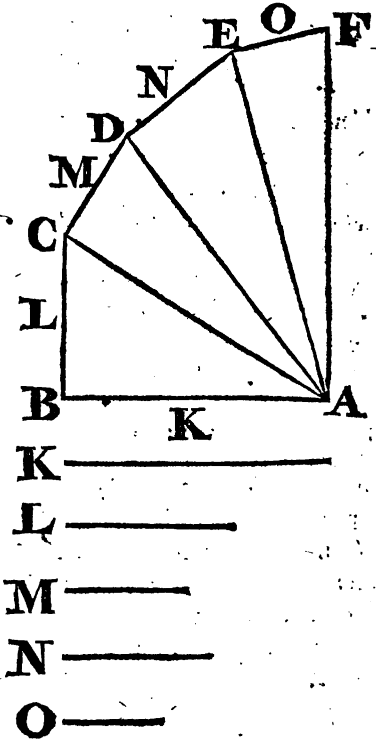
Nam quod latus BE occurrat lateri LK & latus BD continuato lateri IH ſic patet, ſiquidem omnes anguli O, ut & P manifeſto æquales ſunt, quia ubique O + P conſtituunt unum rectum.

Adeoque △lum ABC revolutum circa centrum B congruet cum triangulo BLE; revolutum autem circa centrum C, congruet cum triangulo CID.

SCHOLIUM. I.

Pulcherrimum hoc Pythagoræ inventum inſigne per totam Matheſin eſt Theorema, & non pauca utiliſſima ſuppeditat Problemata, quorum cum alia apud Clavium & alios Autores abundanti ſatis copia videri poſſint, nos tria tantum afferemus.

PROBLEMA I.



Datis quodlibet lineis K. L. M. N. O. invenire Quadratum quod omnium linearum quadratis ſimul ſumtis ſit æquale.

Conſtructio & Demonſtratio.

1. Duas lineas K & L, junge in angu-

gulo recto ABC, erit ductâ rectâ AC: □ AC ∞ □tis *K*, & L.

2. *F*actâ CD ∞ M perpendiculari ad CA, erit □ AD ∞ □tis. *K*. L. M.

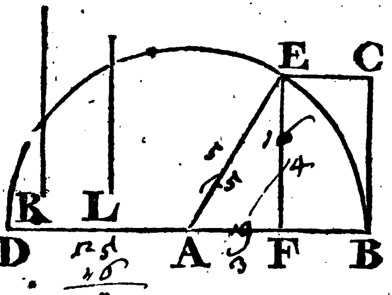
3. Ad AD ſiat perpendicularis *DE* ∞ N, eritque □ *AE* ∞ □tis *K*. L. M. N.

4. Ipſi *AE* fiat perpendicularis *EF* ∞ O, eritque □ *AF* ∞ □tis. *K*. L. M. N. O.

Quæ omnia ſequuntur ex hac prop. 47. cum quatuor iſta triangula ABC. ACD. *ADE*. *AEF*. per conſtructionem ſint rectangula.

Pro-

PROBLEMA. II.



Datis duabus lineis inæqualibus *K*. L. invenire quadratum, quo a ſe invicem quadrata ab illis facta differunt.

CONSTRUCTIO.

1. Fac rectam DB duplam datæ majoris *K*.

2. Super illa deſcribe Semicirculum DEB.

3. Fiat ipſi DB perpendicularis BC ∞ datæ L.

4. Ducatur CE ad Semicirculum, parallela BD.

5. Ex

5. Ex puncto E demittatur perpendicularis EF.

Tum dico □ AF eſſe differentiam □torum *K*. & L.

DEMONSTRATIO.

Ducta AE erit triangulum AEF per conſtructionem rectangulum; adeoque per 47. I.

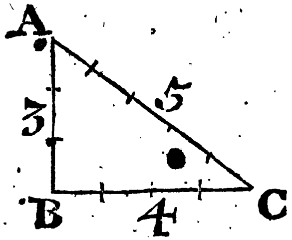
□ AE ∞ □ EF + □ *AF*
Atqui □ AE ∞ □ K. } Per con-
Et □ EF ∞ □ L. } ſtruct.

Ergo □ K ſuperat □ L per □ AF; adeoque □ AF eſt differentia □torum, K & L.

PROBLEMA III.

Cognitis trianguli rectan-guli *ABC* duobus lateribus, invenire tertium.

PRAXIS.



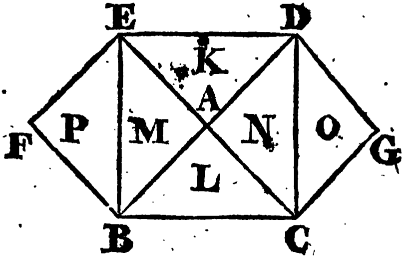
Sint cognita duo latera *AB* 3. *BC* 4. Quia triangulum eſt rectangulum: duo quadrata *AB* & *BC*: ſeu 9 & 16 addantur in unam ſummam:

&

& obtinebitur 25: pro duobus □tis *AB. BC.* hoc eſt pro □to *AC*: cujus radix 5 dabit latus quæſitum *AC.*

Similiter cognita ſint latera *AC* 5 & *BC* 4: tum a □to *AC* 25 ſublato □to *BC*, 16, reſtabit pro □to *AB* 9. cujus radix exhibebit latus quæſitum *AB.*

SCHOLIUM II.



Si triangulum rectangulum ſit ſimul Iſoſceles, facillime propoſitionis veritas demonſtrabitur hunc in modum.

PRÆPARATIO.

1. Super lateribus AB. AC. fiant □ta AF. AG.

2. Ducantur rectæ CD. DE. EB.

Dico BCDE eſſe □tum a BC, & ∞ □tis AF. AG.

DEMONSTRATIO.

PARS I.

Per 32. I. illuſque Coroll. 2. tres angu-

li

li ad B ſc. ABC. ABE. EBF. ut & tres ad C ſcil. ACB. ACD. DCG: præterea duo ad E ſc: AEB. FEB, ut & ad D duo ADC. GDC; ſunt ſemirecti: unde jam facile deducitur angulos AED, ADE etiam eſſe ſemirectos: adeoque quatuor angulos quadrilateri BCDE eſſe rectos: quare latera oppoſita ſunt parallela: ſc. BC. ED & EB. DC.

Atqui BC ꝏ CD (6. I.) quia triang. BCD eſt rectangulum in C & habet duos angulos ſupra Baſin BD æquales: unde etiam BE ꝏ E*D*.

Ergo quatuor latera BC. CD. DE. EB ſunt æqualia; adeoque BCDE □tum lateris *BC*.

PARS II.

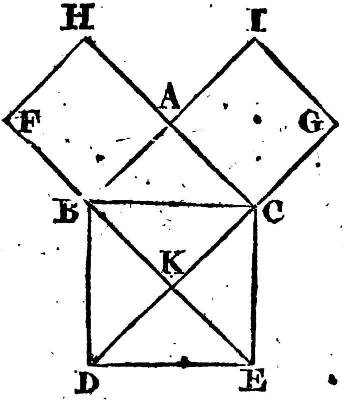
Sex triangula K. L. M. N. O. P. habent ſuas baſes inter ſe æquales, (quia ſunt latera □ti) & duos angulos ſupra baſin, quia omnes ſunt ſemirecti.

Ergo per 26. I. triangula omnia inter ſe ſunt æqualia.

Adeoque 4 triangula K. M. L. N ꝏ ſia 4 triangulis. P. M. N. O.

Hoc eſt □tum. BCDE ꝏ □tis AF. AG. Q. E. *D*.

Cui demonſtrationi aliam ſic breviter adjungimus.



Deſcriptis quadratis *AF. AG. BE*, producantur latera *FB. GC.* quæ neceſſario debere cadere in *E* & *D* facile probari poteſt; ut *BE CD* ſint Diametri, quæ ipſum quadratum & ſingulos illius angulos bifariam ſecant.

Unde jam nullo negotio deducitur lineas *B*K. *C*K. *D*K. *E*K eſſe inter ſe & lateribus *AB. AC.* æqua-

æquales, adeoque trianguli *DBC* cum □to *CI* inter eaſdem parallelas *IB GD* exiſtentis, baſis *DC*, dupla eſt Parallelogrammi baſeos *CG*: ergo per Scholium pro. 41. I. Triang *DBC* ∞ □to *AG*.

Deinde triangulum *DEC* ∞ triang. *DBC*. 34. I.

Et Triang. *DEC* ∞ □to *AG*.

Et □tum *AG* ∞ □to *AF*.

Ergo Triang. *DEC* ∞ □to *AF*.

Quare ſequitur duo Triangula *DBC*. *DEC* ſimul ſumta, hoc eſt □tum *BCDE* eſſe ∞le quadratis duobus *AF*. *AG* ſimul ſumtis.

Cæterum ex hac eadem demonſtrationis forma, ſequens haud inelegans deducimus

Theorema. I.

In Triangulo Iſoſcele rectangulo *ABC*, quadratum Hypotenuſæ *BC* quadruplum eſt trianguli ejuſdem propoſiti *ABC*.

De-

DEMONSTRATIO.

Ex ſuperiori demonſtratione patet ſingulos □ti *BE* angulos biſectos eſſe, & lineas *B*K. *C*K. *DK* *EK* lateribus *AB*. *AC*, æquales: Unde jam ſequitur quatuor triangula *BKC*. *CKE*. *EKD*. *DKB*. & inter ſe & triangulo *BAC* eſſe æquiangula, & æquilatera: adeoque æqualia.

Cum autem quatuor iſta triangula conſtituant □tum *BCDE*, patet illud □tum quadruplum eſſe Trianguli *ABC*. Q. E. D.

Quæ demonſtratio præcedentis Theorematis, cum mihi occaſionem præberet inquirendi, quomodo □tum hypotenuſæ trianguli rectanguli inæqualium laterum ſe haberet ad ipſum Triangulum, ſequens ſeſe ſtatim prodebat.

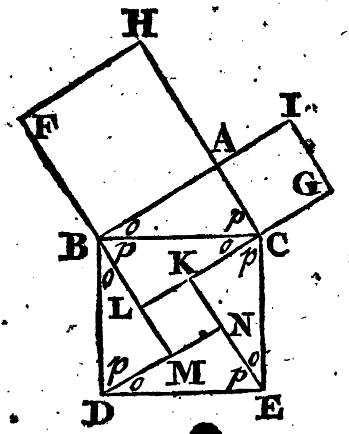
Theorema II.

In quolibetcunque Triangulo Re-

Rectangulo inæqualium laterum, quadratum Hypotenuſæ triangulum propoſitum quater ſumtum ſuperat □to quod fit a differentia reliquorum laterum: ſeu quod idem eſt; □tum Hypotenuſæ eſt æquale triangulo propoſito quater ſumpto una cum □to differentiæ reliquorum laterum.

Demonſtrationem vide pagina ſequente.

DEMONSTRATIO.



Super trianguli rectanguli *ABC* lateribus conſtruantur □ta *AF*. *AG*: *BE*.

Deinde producantur latera *FB* *GC*: tum ex angulis *E* & *D* ducantur EK parallela *FB*, & *DN* parallela *GC*: iſtæ lineæ ita ſe interſecabunt, ut conſtituant quatuor triangula *BLC*. *CKE*. *END*. *DMB*,

DMB, & in illorum medio quadratum *KLMN*.

Quibus conſtructis vel leviter in præcedentibus exercitatus facile omnes angulos *O*, ut & omnes *P* inter ſe æquales eſſe perſpiciet.

Unde ſequitur per 26. I. quinque iſta Triangula eſſe inter ſe æqualia; & habere latera æqualia lateribus: ſc. *BM*. *DN*. *EK*. *CL*: ut etiam *AC*. *CK*. *EN*. *DM*. *BL*.

Quare ſi auferatur *BL* a *BM*: *DM* à *DN*: *EN* ab *EK*: & *CK* a *CL*, remanebunt *KL*. *LM*. *MN*. *NK* inter ſe æquales, quæ ſunt differentiæ laterum *AB*. *AC*.

Quia autem iſtæ æquales lineæ ad angulos rectos ſunt junctæ, ut facile ex 26. I. patet, ſequitur quadrilaterum K*LMN* eſſe quadratum differentiæ laterum *AB*. *AC*.

Cum ergo quatuor triangula *BMD*. *DNE*. *EKC*. *CLB*. cum

□to KLMN conſtituant totum *BCDE*; quod fit ab hypotenuſa BC: patebit abunde propoſiti noſtri Theorematis veritas.

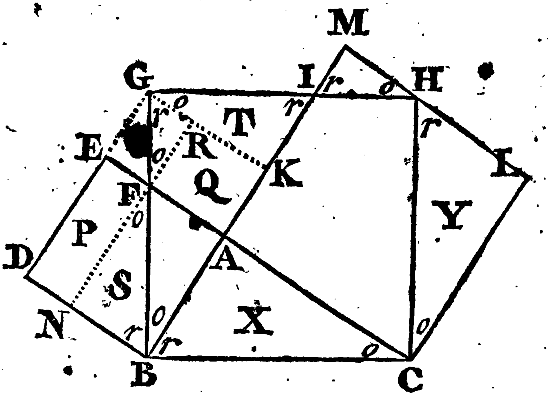
Vix autem poſſum quin hic afferam plus quam elegantem Clariſſimi Chriſtophori Sturmii demonſtrationem præſentis prop. 47, quam ex hac figura, alio ac diverſo a nobis ex fundamento, conſtructâ; nobis ſuppeditat, in calculo Alegebraico propoſitum: quæ tamen ab iis, qui vel a limine Analyſin ſpecioſam ſalutaverunt, intelligi poteſt.

Illa autem ita ſe habet. Trianguli Rectanguli *ABC*, latus *BC* ſeu hypotenuſa dicatur *a*: *AC* vocetur *b*. *AB* *c*. Area Trianguli *ABC* erit $\frac{1}{2}$ *bc*. adeoque quatuor triangula facient 2 *bc*: Deinde differentia laterum *AB*. *AC* erit $c-b$, ejuſque □tum $cc-2bc+bb$: quod priori areæ quatuor triangulorum additum facit $cc+bb$, quæ

quæ ſumma eſt 2plis □to *aa* facto ab hypotenuſa.

Cum autem iſta ſumma exhibeat duo □ta laterum *AB*. *AC*. ſequitur etiam duo illa □ta eſſe 2plia □to *BC*.

Q. E. D.



Cæterum illuſtris hujus propoſitionis aliam a præcedente generalem demonſtrationem hoc modo damus.

Triangulum rectangulum datum ſit ABC; laterum AB. AC. quadrata ſint AD. AL: & lateris BC quadratum BH: Jam patet ad oculum quadratum BH a reliquis quadratis AD, AL, abſcindere triangulum AFB & trapezium AIHC. Si jam, producta DE

DE in G, & ducta NR per F parallela BM & GK parallela EA, demonſtratur eſſe triangulum

X ∞ Y.
S ∞ T.

Parallelogr. P ∞ Q.

Triangulum GFR ∞ IHM.

Certi eſſe poterimus de propoſitionis veritate.

DEMONSTRATIO.

Generaliter notandum facile poſſe ex præcedentibus demonſtrari omnes angulos O ut & omnes R eſſe inter ſe æquales.

Primum X ∞ Y.

Duo triangula X & Y habent duos angulos O & R ut & latera BC. CH æqualia: Ergo (26. I.) ipſa triangula ſunt æqualia.

Se-

Secundum S ∞ T.

Duo triangula S & T, habent duos angulos O & R, & ut & latera NF. GK æqualia: Ergo (26. I.) ipſa triangula ſunt æqualia. Et latus BF ∞ GI. quibus ab æqualibus BG, GH ablatis, remanet FG ∞ IH.

Tertium P ∞ Q.

Quia ſunt complementa parallelogrammi DK. (43. I.

Quartum Triang. GFR ∞ IHM.

Duo triangula GFR & IHM, habent duos angulos O & R. ut & latera FG. IH æqualia. Ergo (26. I.) ipſa triangula ſunt inter ſe æqualia.

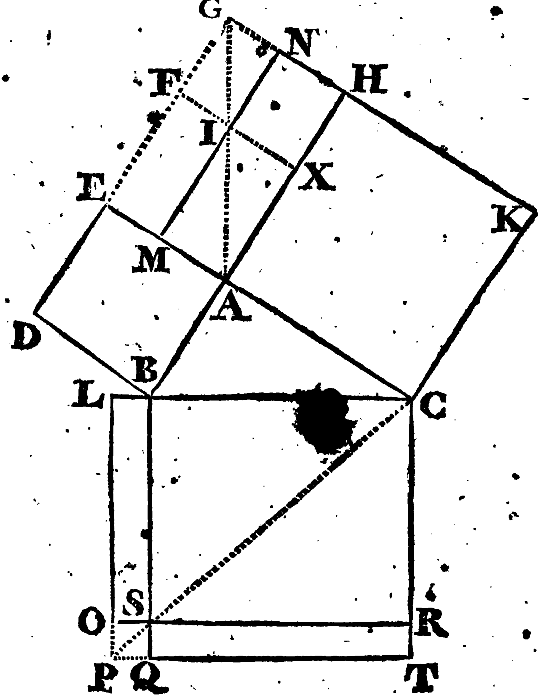
Ex quibus patet lateris BC quadratum BH in ſe comprehendere duorum reliquorum laterum AB. AC quadrata AD. AI. Ergo quadratum BH etiam per

per Axioma 13. duobus quadratis AD. AI. æquale eſt.

Q. D. E.

Quod autem BG concurrat cum DE in puncto G, & CH cum ML in H; ſupra demonſtratum eſt.

Alia DEMONSTRATIO.



Tri-

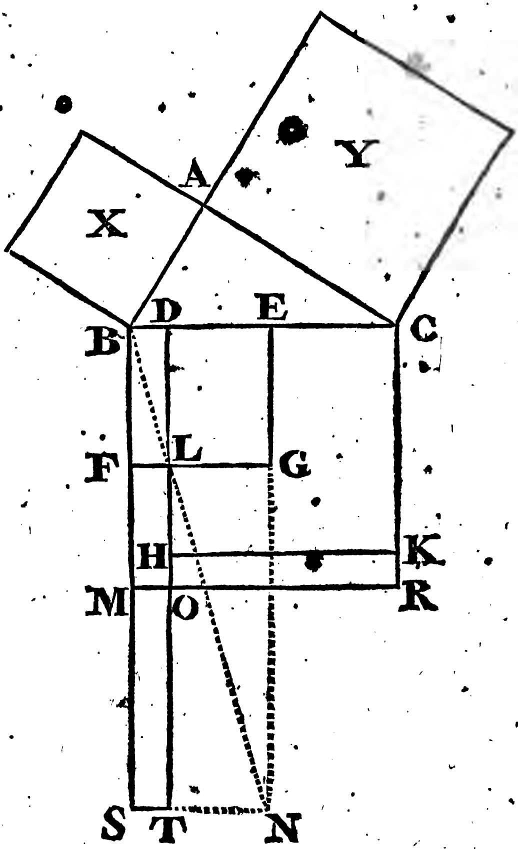
Trianguli rectanguli ABC, laterum quadrata ſunt AD. AK. BT. demonſtrandum eſt hoc tertium BT. eſſe ꝏ le duobus reliquis.

Fiat AX ꝏ AK. erit ſuper AX factum quadratum AF ꝏ AD. Producatur KH in G ut ſit HG ꝏ XF Ducatur AG. & per I ducatur MIN parallela AH & tandem agatur EG. Eritque HE parallelogrammum, cujus complementa EI. IH. ſunt æqualia: ſi utrimque addatur commune parallelogrammum MX. erit quadratum AF hoc eſt AD ꝏ paralleg. MH:

Ergo totum parallelogr. MK eſſe æquale duobus quadratis AD. AK.

Deinde ſumatur CL ꝏ CM, & CR ꝏ CK. & perfecto parallel. LR (quod erit ꝏ ipſi MK) producantur LO & TQ ut ſibi occurrant in P, tum ducatur Diagonalis CS, quæ producta cadet in P. (ut mox demonſtrabitur.) Hiſce factis in parallelogr. LT duo complementa LS. ST erunt (43. I.) inter ſe æqualia: quibus ſi addatur commune parallelogr. BR, erit parallelogr. LR (hoc eſt duo Quadrata AD. AK) ꝏ quadrato BT.

 Ul-


A
Y
X
D
E
B
C
L
F
G
H
K
M
O
R
S
T
N

Ultima Demonſtratio.

Intra lateris BC quadratum BR, ſit □ CH ∞ lateris AC □to Y: Quo a □to BR ſublato remanebunt duo parallelogramma BO. OK. ſeu facto parallelogr. OS ∞ OK, remanebit totum parallelogrammum BT, Quod ſi demonſtratur eſſe ∞ □to X, peracta res erit.

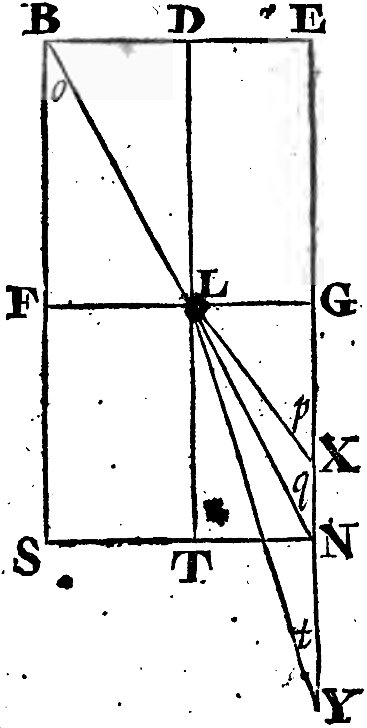
Quare ſumta BE ∞ BA, conſtruatur □tum BG ∞ □to X. Tum productis lateribus EG. ST, ut concurrant in N; ex B per L ducatur BLN; quæ etiam cadet in idem punctum N.

Tum in parallelogrammo BN complementa EL. LS erunt æqualia & ſi ab utraque parte addas commune BL. erit parallelogr. BT (hoc eſt BO + OK) ∞ □to BG ſeu X.

Unde jam patet duo □ta X & Y eſſe æqualia □to BR.

Q. D. E.

Quod autem Diameter BL producta cadat in punctum N, ubi latera EG, ST producta concurrunt, ſic probatur.



Si

Si tnon cadat in N, tum juxta adverſarium cadat.

Vel ſupra N in X, ut BX ſit linea recta.

Vel infra N in Y, ut BY ſit recta.

In X ſupra N.

Angulus O ꝏ Q.
Angulus O ꝏ P. } 29. I.

Ergo P ꝏ Q externus interno contra 16. I.

Quæ demonſtratio obtinet in omnibus punctis ſupra N ſitis.

In Y infra N.

Angulus O ꝏ Q.
Angulus O ꝏ T. } 22. I.

Ergo Q ꝏ T. iterum externus interno contra 16. I.

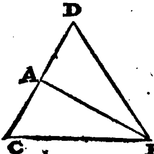
Eademque demonſtratio locum habet in omnibus punctis infra N poſitis.

Ergo cum linea BL producta non poſſit cadere ſupra nec etiam infra N neceſſario cadet in ipſum punctum N.

PRO-

Theor. 34.

PROPOSITIO XLVIII.



Si quadratum ab uno Trianguli latere CB deſcriptum ſit æquale duobus reliquorum laterum CA. AB quadratis: angulus CAB, quem reliqua iſta latera continent, rectus erit.

DEMONSTRATIO.

a 11. I. Ex A ipſi AB (a) excitetur perpendicularis AD ∞ AC. & ducatur recta DB.

Tum in Triangulo DAB erit.

b 47. I. Quadr. DA (hoc eſt AC) + quadr. AB (b) ∞ quadr. DB.

Atqui quadr. AC + quadr. AB etiam eſt ∞ quadr. CB per Prop.

---

c Ax. I. Ergo (c) quadr. DB ∞ quadr. CB.

Adeoque latus DB ∞ lateri CB.

Quare in Triangulis ADB, ACB.

Latus AD ∞ AC per conſtructionem.

Latus DB ∞ CB.

Latus AB commune.

---

d 8. I. Ergo (d) etiam omnes anguli ſunt æquales adeoque

Ang. DAB ∞ CAB.

Atqui DAB eſt rectus.

Ergo CAB etiam rectus erit. Q. D. E.

FINIS LIBRI PRIMI.

Eu-

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER SECUNDUS.

IN primo libro inſtituta triangulorum tum quoad angulos tum quoad latera varia comparatione, & parallelogrammum non una & inter ſe & cum triangulis collatione, in hoc libro ſecundo aggreditur Euclides linearum ad libinum ſectarum parallelogramma Rectangula & Quadrata; docendo quomodo ſe habeant Parallelogramma rectangula quæ fiunt a partibus alicujus lineæ tum inter ſe tum relata ad Quadrata totius lineæ: ſicut ex ipſis propoſitionibus porro manifeſtum evadet.

Cum autem hujus libri propoſitiones; licet numero non adeo multæ, tales ſint, ut ſua difficultate tyronum progreſſui haud exiguam ſæpe injiciant moram, nos

oleum & operam non perdidiſſe exiſtimabimus, ſi illarum demonſtrationes ita ordinemus, ut quilibet illas, attento perlegens ſtudio, illiſque primum librum bene perceptum rite applicans, maximam difficultatem penitus diſparere comperiat.

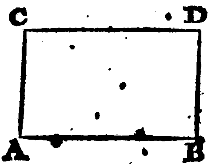
Cæterum ne occurrentes ignotæ voces demonſtrationum abrumpant curſum, hic ut & in primo libro factum eſt, Definitiones præmittuntur terminorum adhibendorum tollentes dubiam ſignificationem.

De-

DEFINITIONES.

I.

Parallelogrammum rectangulum ABCD contineri dicitur ſub duabus rectis CA: AB, rectum angulum A comprehendentibus.

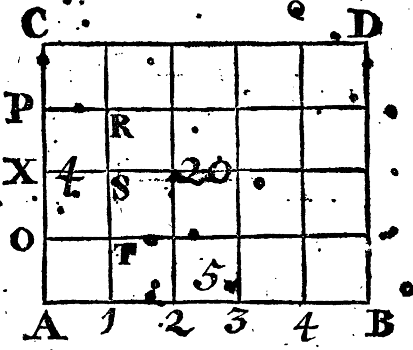


Antea vidimus generationem alicujus ſuperficiei. quæ in memoriam revocata parallelogrammi rectanguli formationem intellectu reddet faciliorem.

Rectæ lineæ AB perpendiculariter inſiſtat linea CA, quæ concipiatur ferri ſupra lineam AB, ut ipſi ſemper maneat perpendicularis; cum iſta linea CA pervenerit ad punctum B: tum extremum punctum C deſcriptam relinquet lineam CD æqualem ipſi AB; & cum linea BD ſit quaſi eadem cum linea AC ex puncto

A delata in punctum B, erit linea BD etiam æqualis ipſi AB.

Unde patet ad inveniendam totam quantitatem ſeu aream alicujus parallelogrammi requiri tantum notam longitudinem duorum laterum angulum rectum continentium.



Quod ut adhuc clarius evadat., ſicut & arctiſſimam inter linearum in ſe invicem ductum & numerorum multiplicationem eſſe affinitatem, ponamus lineam CA diviſam eſſe in quatuor partes æquales CP. PX. XO. OA. ſimiliter lineam AB,

AB in quinque partes, quæ prioribus æquales ſint. Si jam linea CA ſuper AB mota pervenerit ad locum 1 Q punctum C. deſcriptum exhibebit lineam CQ. punctum P, lineam PR: X, lineam XS. O, lineam OT; adeoque unico iſto motu facta erunt quatuor iſta minora quadrata CR. PS. XT. O 1, quot nim. linea CA partes habet: ſi enim ex pluribus conſtaret partibus, etiam plura conſtituta eſſent quadrata.

Facile autem intelligimus illud idem eſſe ac ſi numerus 4 ducatur ſeu multiplicetur per 1 ſeu unitatem.

Similiter ſi linea Q 1 (quæ eadem jam concipienda eſt cum AC) ſecundo motu pervenerit ad punctum 2, eodem modo quatuor alia quadrata efficientur quæ prioribus addita ſimul 8 dabunt: id quod iterum idem eſt, ac ſi numerus 4 bis multiplicetur per 1 ſeu ſemel per 2.

Non aliter ſi linea AC perget moveri; tertius motus quatuor alia prioribus adjiciet quadrata; quatuor alia quartus; donec tandem quintus ultima quatuor adjungendo quadrata totum parallelogrammum rectangulum perficiat & compleat: quæ omnia quadrata ſibi invicem addita,

20 exhibebunt; quod rurſus idem eſt ac ſi numerus 4 quinquies per unitatem ſeu ſemel per 5 multiplicatus eſſent; quæ operatio ſimiliter eundem producit numerum 20.

Cæterum notandum eſt in ſequentibus ad multiplicandum lineam AB per lineam CD, ſeu ad ducendam lineam AB in lineam CD: vel tandem ad deſignandum rectangulum comprehenſum ſub lateribus AB, CD me ſemper ſcripturum □ AB. CD.

Unde jam exiſtimo manifeſtam ſatis eſſe rationem ob quam ad inveniendam alicujus ſeu omnium parallelogrammorum rectangulorum aream ſolummodo duorum laterum rectum angulum comprehendentium requiratur notitia.

Hinc porro apparet, quomodo cognita area parallelogrammi rectanguli, & alterutro laterum alterum inveniri poſſit latus; dividendo ſcilicet datam aream per latus cognitum: id quod in parallelogrammo ABCD clare patet, quod 20 quadrata continet; qui numerus ſi dividatur per 4 ſeu cognitum latus CA. acquiremus 5 pro latere AB. & viciſſim ſi 20 dividatur per 5 ſeu latus notum AB, invenietur 4 pro altero latere AC.

NOTA.

Primo. Parallelogrammum dicitur rectangulum quod habet unum angulum rectum. Nam ſi unus eſt rectus, [a] erunt & reliqui recti. [a] 29 & 34. I.

Secundo. Parallelogrammum eſt vel oblongum vel quadratum.

Oblongium eſt quod latera contigua habet inæqualia, ſive quod continetur ſub duabus rectis inæqualibus; illud autem nos in ſequentibus ſemper exprimemus hoc ſigno ▭; adeoque ex: gr: ▭ AC, ſemper ſignificabit parallelogrammum rectangulum AC.

Quadratum eſt, quod ſub duabus rectis æqualibus continetur: illud etiam exprimemus tali ſigno □ ut □ CD, ſemper denotet Quadratum CD.

Tertio. In ſequentibus nomine rectanguli Euclides ſemper intelligit parallelogrammum rectangulum.

Quarto. Geometræ omne parallelogrammum exprimunt, duas tantum nominando literas per diametrum oppoſitas: ut ad deſignandum parallelogrammum appoſitum adhibent literas AD. vel BC.

II. Omnis

II.

Omnis parallelogrammi ſpatii unum quodlibet eorum quæ circa diametrum illius ſunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocatur.

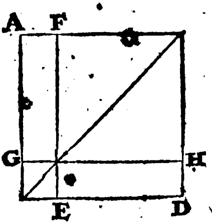
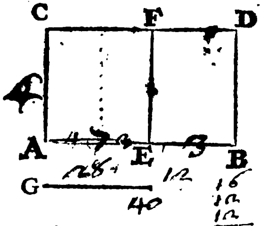


Figura FGEH, compoſita ex duobus complementis FG. EH &, quod circa diametrum eſt parallelogrammo GE, dicitur Gnomon ſeu norma; ad imitationem illius inſtrumenti quo fabri utuntur, ad examinandum, utrum ex. gr. duo parietes, vel duo aſſeres ad angulum rectum conjuncti ſint nec ne.

PRO-

PROPOSITIO. I.



Si fuerint duæ recta G & AB, quarum altera ſecta ſit in quotcunque partes AE. EB altera vero inſecta; erit rectangulum ſub illis duabus G & AB comprehenſum æquale rectangulis, quæ ſub inſecta G, & ſub ſingulis ſegmentis AE. EB continentur. Theor. 1.

DEMONSTRATIO.

Ex punctis A & B erige duas perpendiculares AC, BD æquales datæ G: & juncta CD, ex E duc rectam EF parallelam AC vel BD. Tum lineæ CA, FE inter (a) ſe æquales erunt ꝏles datæ G. a 34. I.

Jam □ AF continetur ſub CA, hoc eſt G & ſegmento AE.

Et □ ED continetur ſub FE hoc G eſt & ſegmento ED.

Duo autem □la AF, ED ſimul ſunt (b) ꝏlia toti □lo AD quod continetur ſub data & tota AB. b Ax. 16.

Ergo patet veritas propoſitionis.

Sub calculi formula breviter ſic demonſtratur

AB ꝏ AE + EB }M
G . G G

(c) □ G, AB ꝏ □ G, AE + □ G, EB. c Ax. 6.

Q. D. E.

Sit AB. 10.
AE. 7.
EC. 3.
G. 4.

Vel in Numeris.

10 ꝏ 7 + 3 }M
4 . 4 4

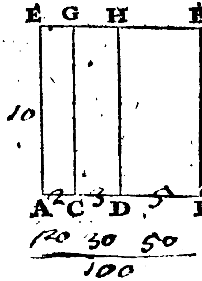
---

40 ꝏ 28 12. ꝏ 40.

Z Pro-

PROPOSITIO II.

Theor. 2. *Si recta AB ſecta ſit utcunque in C & D tria rectangula ſub tota AB, & ſingulis ſegmentis AC. CD. DB comprehenſa æqualia ſunt quadrato quod fit a tota AB.*



DEMONSTRATIO.

Super AB fiat quadratum BE, ducantur CG. DH parallelæ AE: quæ ſunt æquales a AE. hoc eſt AB. (a 34. 1.)

□ EC fit ab EA hoc eſt AB & parte AC.

□ GD fit ab GC hoc eſt AB & parte CD.

HB

□ HB ſit ex HD hoc eſt AB & parte DB.

Cum autem tria □la EC. GD. HB ſimul ſumta conſtituant □tum EB, patet illa etiam ipſi eſſe æqualia.[b] b Ax. 13.

Sub calculo.

$$\left.\begin{array}{l} AB \infty AC + CD + DB. \\ AB \quad AB \quad AB \quad AB. \end{array}\right\} M$$

□ AB ∞ □ AB. AC + □ AB. CD. + □ AB. DB.

Vel in numeris.

Sit AB 10. AC 2. CD 3. Ergo DB 5.

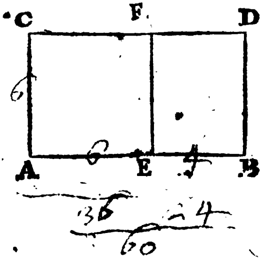
$$\left.\begin{array}{l} 10 \infty 2 + 3 + 5. \\ 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \end{array}\right\} M$$

---

100 ∞ 20 + 30 + 50 ∞ 100.

PROPOSITIO III.

Theor. 3. *Sit recta AB ſecta utcunque in E, rectangulum ſub tota AB & partium alterutra AE comprehenſium, æquale eſt ejuſdem partis AE quadrato; una cum rectangulo ſub partibus AE. EB comprehenſo.*



DEMONSTRATIO.

Ex A & B erige perpendiculares AC. BD æquales ſegmento a 34. 1. AE: tum juncta CD ducatur EF parallela AC, quæ ipſi AC etiam a erit æqualis

A { ▭ CE continetur ſub CA hoc eſt AE & ſegmento AE, adeoque CE eſt quadratum factum ab AE.
▭ FB continetur ſub FE hoc AE & ſegmento EB. }

□ CE cum ſeu + ▭ FB eſt æquale ▭ CB, comprehenſo ſub CA hoc eſt ſegmento AE & tota linea AB. Q. E. D.

Sub calculo.

$$\left.\begin{matrix} AB \infty AE + EB \\ AE \quad AE \quad AE \end{matrix}\right\rangle M$$

▭ AE. *AB*. ∞ □ AE + ▭ AE. *EB*.

Vel in numeris.

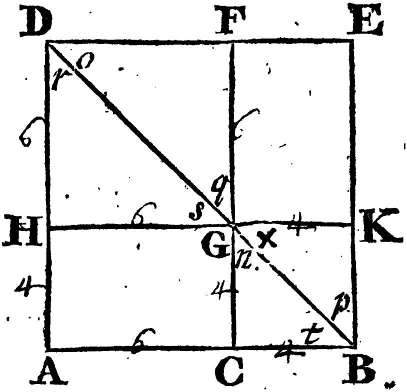
Sit AB. 10. AE. 6. Ergo EB. 4.

$$\left.\begin{matrix} 10 \infty 6 + 4 \\ 6 \quad 6 \quad 6 \end{matrix}\right\rangle M$$

60 ∞ 36 + 24 ∞ 60.

PROPOSITIO. IV.

Theor. 4. *Si recta linea AB utcunque ſecta ſit in C. Quadratum totius AB erit æquale quadratis ſegmentorum AC, CB, una cum bis ſumto rectangnlo ſub ſegmentis AC. CB comprehenſo.*



DEMONSTRATIO.

a 46. I. Super AB fiat [a] □ BD, & ducta diametro BD ſumatur *B*K ∞ *B*C. tum

tum ducantur b CF. KH parallelæ lateribus *BE.BA*. b 31. I.

Jam in triangulo DE*B*.

Angulus O ∞ P. quia uterque ſemirectus. c 2 Cor. 32. I.

Atqui ang. Q ∞ P. d d 29. I.

Ergo O ∞ Q. adeoque DF ∞ FG e 6. I.

. Eodem modo probatur quod ſit Ang. R ∞ S. ac proinde latus DH ∞ GH.

Atqui in parallelogrammo GD, latera oppoſita DF. HG ut & DH, FG ſunt æqualia f f 34. I.

Ergo omnia illius latera ſunt inter ſe æqualia.

Atqui illorum unum HG ∞ AC. g g 34. I.

Ergo omnia ſunt æqualia ſegmento AC. Adeoque cum omnes anguli ſint recti, parallelogrammum DFGH eſt quadratum factum ab uno ſegmento AC.

Eodem modo facile demonſtra-

ſtratur parallelogrammum CK eſſe quadratum alterius ſegmenti C*B*.

Deinde □ FK continetur ſub FG hoc eſt AC & ſub G*K* hoc eſt C*B*.

Denique □ AG continetur ſub uno ſegmento AC & ſub CG hoc eſt C*B*.

Quæ duo □ la ſi ad duo reliquo □ta addantur exhibebunt totum □ quod ſit ab AB; adeoque ipſi æqualia erunt. Q. E. D.

Per calculum hoc modo demonſtratur.

AB ꝏ AC + CB
AB ꝏ AC + CB M.

□ AC + □ AC. CB.
+ □ AC. CB + □ CB.

□ AB ꝏ □ AC + 2 □ AC. CB + □ CB.

Seu in numeris.

AB ꝏ 10. AB 10
AC ꝏ 6. AB 10
Ergo CB ꝏ 4. 100

4 CB

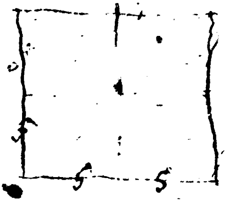
AC 6	4 CB	6 AC
AC 6	4 CB	4 CB
36	16	24
		2
		48
		36
		16
		100

COROLLARIUM I.

Parallelogramma circa diametrum quadrati ſunt quadrata.

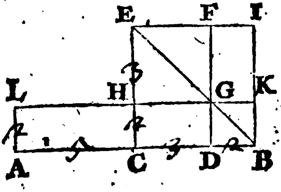
COROLLARIUM II.

Si recta linea bifariam ſecetur quadratum totius lineæ quadruplum eſt quadrati a dimidia facti.



PROPOSITIO V.

Theor. 5. *Si recta linea AB ſecetur in æqualia in C, & non æqualia in D: rectangulum AG ſub inæqualibus ſegmentis AD. DB comprehenſum, una cum quadrato HF ab intermedia ſectione CD, æquale eſt quadrato CI, quod a dimidia CB deſcribitur.*



PRÆPARATIO.

1. Super dimidia CB fiat a quadratum CI, ducaturque diameter. a 46. 1.

2. Ex D ducatur DF lateri BI b parallela. b 31. 1.

3. Sumta BK ∞ BD, ducatur KL b parallela AB, ut & AL parallela BK.

De-

DEMONSTRATIO.

A (▭ CG ∞ [c] ▭ GI. quia ſunt complementa. [c] 43. I.
□ DK □ DK.

▭ CK ∞ DI.

Atqui ▭ CK ∞ [d] ▭ AH. quia ſunt in iiſdem parallelis & æqualibus baſibus. [d] 36. I.

Ergo ▭ AH ∞ ▭ DI.) A.
▭ CG ▭ CG.)

A (▭ AG ∞ Gnomoni GHBFG.
□ HF □ HF, quod fit a CD. 4. II.

▭ AG + □ HF. ∞ □ CI. a dimidia CB. facto.

In numeris.

Sit tota AB 10. Ergo dimidia AC, CB, 5.
AD 8. Ergo DB 2. Et CD. 3.

CB 5 } M. CB 5	M. { AD 8 DB 2
□ CB 25	▭ AD. DB. 16.

Tum.

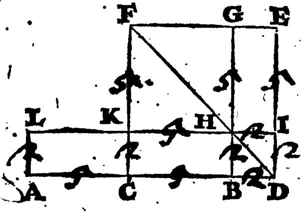
CD 3. } M.
CD 3.

□ CD 9. } A
▭ AD. DB 16.

▭ ADB. + □ CD 25. ut ante.

PROPOSITIO VI.

Theor. 6. *Si recta AB ſit bifariam ſecta in C, eique recta quædam BD adjiciatur; Erit rectangulum ſub tota compoſita AD & adjecta BD contentum una cum quadrato dimidiæ CB, æquale quadrato ipſius CD compoſitæ ex dimidia & adjecta.*



PRÆPARATIO.

1. Super CD fiat □ CE.

2. Ducta Diametro FD, ex B agatur BG parallela DE.

3. Sumpta DI ∞ DB, ducatur IL parallela DA, ut & AL parallela DI.

De-

DEMONSTRATIO.

□ AK ꝏ [a] □ CH. quia in iiſdem parallels. — a 36. 1.

Atqui □ HE ꝏ [b] □ CH, quia ſunt complementa. — b 43. 1.

Ergo □ AK ꝏ [c] □ HE. — c Ax. 1.
□ CI □ CI. A.

A: □ AI ꝏ [d] Gnomoni GHKDG.
□ KG □ KG factum a dimidia CB. — d Ax. 2.

□ AI + □ KG ꝏ □ CE quod fit a CD

In numeris.

Sit linea AB 10. BD 2. Ergo tota AD. 12. Dimidia AB. ſeu AC. ſeu CB 5. Ergo CD 7.

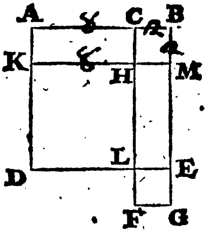
AD 12.
BD 2. M.

□ AD. DB 24
□ CB. 25 A.

□ AD. DB + □ CB 49 ꝏ 49 □ CD.

PROPOSITIO VII.

Theor. 7. *Si recta AB uicunque ſecetur in C, erunt quadrata totius AB & utriusvis ſegmenti CB, æqualia bis ſumto rectangulo contento ſub tota AB & ſegmento dicto CB, una cum quadrato alterius ſegmenti AC.*



PRÆPARATIO.

a 46. I. 1. Super [a] AB fiat □ AE.

2. Sume BM ∞ BC, & ducantur CL MK [b] parallelæ lateribus BE. BA. Eritque LE ∞ [c] CB.

b 31. I. c 34. I.

3. Super LE fiat □ EG.

De-

DEMONSTRATIO.

Duo □ta AE. EF ∞ [d] duobus □lis AM. MF cum □to KL. [d] Ax. 13.

Atqui □ AM continetur ſub AB & BM hoc eſt BC.

Et □ MF continetur ſub MG (quæ facile probatur eſſe æqualis AB, cum ſit ME ∞ AC & EG ∞ CB) & GF hoceſt BC

Ut & □ KL ſit a KH hoc eſt AC altero ſegmento.

Ergo patet veritas propoſitionis.

In numeris.

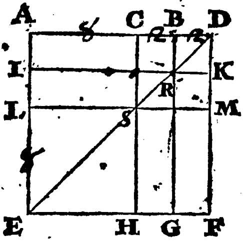
Sit AB 10. □ AB 100 } A.
AC 8. □ CB 4 }
Ergo CB 2. □ AB + □ CB 104.

AB 10 } M.
BC 2 }
□ AB BC 20
2
2 □ AB. BC. 40 } A.
□ AC 64 }
2 □ AB BC + □ AC 104.
ut ante.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Theor. 8. *Si recta linea AB ſecetur utcunque in C; eique adjiciatus BD ∞ BC; Rectangulum quater comprehenſium, ſub data AB & alterutro ſegmento CB, una cum quadrato alterius ſegmenti AC, erit æquale quadrato AF quod ſit a compoſita AD.*



PRÆPARATIO.

1. Super tota AD a fiat quadratum AF.

a 46. I.

2. Sumtis DK. KM æqualibus ipſi BC. ducantur KI. ML parallelæ DA; ut & BG. CH parallelæ AE.

3. Ducatur Diameter ED.

De-

DEMONSTRATIO.

Facile patet quatuor □la IC. IS. GS GM eſſe inter ſe [a] æqualia, & ſub æqualibus lineis contenta. a 36. & 43. I.

Et circa R conſtituta ſunt quatuor □ta quorum latera omnia ſunt ipſi BC æqualia. b Ergo ſi addantur b 3 Cor. 4. hujus.

□la IC | IS | GS | GM. } A.
□ta CR | SR | RD | MR. }

Erunt □la AR. LR. GS + RD: GK. omnia inter ſe æqualia, & contenta vel ſub lineis AB. BC, vel ſub lineis quæ illis æquales ſunt.

Quibus ſi addatur □ LH factum ab LS. hoc eſt altero ſegmento AC. Tota iſta ſumma ſeu quinque iſtæ figuræ exæquabunt totum quadratum AF factum a compoſita AD. Q. D. E.

In numeris.

Sit AB 10. AC 8. Ergo CB 2.

AC 10 } M. AD 12 } M
CB 2 } AD 12 }

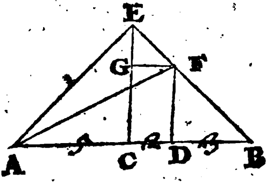
□ AC. CB 20 } M □ AD 144
4 } ut ante.

4 □ AC CB 80 } A.
□ AC 64 }

144.

PROPOSITIO IX.

Theor. 9. *Si recta linea AB ſecetur in æqualia in C, & non æqualia in D; quadrata inæqualium ſegmentorum AD. DB. dupla ſunt quadratorum AC. GD. quæ a dimidia AC & ab intermedia CD fiunt.*



PRÆPARATIO.

I. Ex C erigatur perpendicularis CE ∞ AC vel CB, & jungantur AE EB.

2. Ex D ducatur DF parallela CE.

3. Ex F agatur FG parallela AB: ut & denique FA.

DEMONSTRATIO.

Triangulum ACE eſt rectan-
gulum & Iſoſceles, ergo anguli
A & E ſunt ſemirecti; ut & in a 32. I.
triangulo ECB anguli E & B ſunt
ſemirecti; adeoque totus angulus
EAB eſt rectus.

Deinde in triangulo EGF,
G (∞ [b] ECB) eſt rectus ∵ ang. E b 29. I.
ſemirectus: ergo F etiam ſemire-
ctus: adeoque EG ∞ GF. c

Denique in triangulo FDB an- c 6. I.
gulus D (∞ ECB) rectus eſt. An-
gulus B ſemirectus: ergo & F ſe-
mirectus; adeoque latus FD ∞
DB.

Hiſce prædemonſtratis.

I. In Triangulo rectangulo
ACE.

d □ AE ∞ □ AC + □ CE. ſeu d 47. I.
quia AC ∞ CE.

□ AE duplum □ti AC.

2. In Triangulo rectangulo *EGF*.

□ *EF* ∞ □ *EG* + □ *GF*. ſeu quia *EG* ∞ *GF*.

□ *EF* duplum □ti *GF* hoc eſt *CD*.

Ergo duo □ta *AE*. *EF* ſunt dupla □torum *AC*. *CD*.

3. Atqui in triangulo rectangulo *AEF*.

d □ *AE* + □ *EF* ∞ □ *AF*.

*E*rgo □ *AF* etiam duplum □torum AC. CD.

4. Atqui denique in triangulo rectangulo *ADF*.

d □ AF ∞ □ AD + □ *DF* hoc □ DB.

*E*rgo duo □ta AD. DB ſunt dupla □torum AC. CD.

Q. E. D.

In numeris.

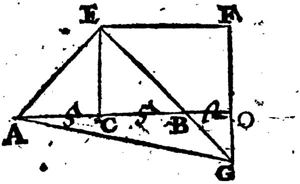
Sit AB 10. Ergo AC. CB. 5.
AD 7: Ergo DB 3.
Et CD 2.

□ AD 49 } A.	□ AC 25 } A.
□ DB 9	□ CD 4
□ta AD. DB 58.	□ta AC. CD. 29. } M. 2.
	bis □ta AC. CD 58.

PROPOSITIO X.

Theor. 10.

Si recta AB ſecta ſit bifariam in C, eique adjiciatur BO; Quadrata totius compoſitæ AO & adjectæ BO erunt dupla quadratorum AC CO, quæ a dimidio AC fiunt, & a CB compoſita ex dimidia & adjecta.



PRÆPARATIO.

1. Ex C erigatur perpendicularis CE ∞ CA vel CB, junganturque AE. EB.

2. Ex E ducatur EF ∞ CO & parallela AO.

2. Ex F ducatur per O recta FG

FG quæ productæ EB occurrat in G.

4. Denique agatur AG.

DEMONSTRATIO.

Triangulum ACE eſt rectangulum & Iſoſceles, ergo anguli A & E ſunt a ſemirecti; ut & in triangulo ECB anguli E & B ſemirecti ſunt: a 32. 1.

Deinde in triangulo EFG angulus F (∞ oppoſito O) eſt rectus: & angulus FEG ſemirectus, (quia angulus BEC eſt ſemirectus;) adeoque alter FGE etiam eſt ſemirectus: Ergo latus G*F* ∞ *F*E ∞ CO.

Denique in triangulo rectangulo BOG angulus ad G ſemirectus eſt: ergo etiam B ſemirectus; adeoque latus BO ∞ OG.

Hiſ-

Hiſce præmiſſis.

1. In triangulo rectangulo ACE.

b 47. I. □ AE ꝏ [b] □ AC + □ CE. ſeu quia AC ꝏ CE.

□ AE eſt duplum □ti AC.

2. In Triangulo rectangulo EFG.

□ [b] EG ꝏ □ *EF* + □ FG, ſeu quia *EF* (ꝏ CO) ꝏ *FG*.

□ *EG* duplum □ti *EF* hoc CO.

Ergo duo □ta A*E*. *E*G ſunt dupla □torum AC. CO.

3. Atqui in triangulo rectangulo *AEG*.

□ta *AE*. *EG* ꝏ [b] □ AG.

Ergo □ AG eſt duplum □torum AC. CO.

4. Atqui denique in triangulo rectangulo AOG

□ AG ꝏ □ AO + □ OG.

Ergo duo □ta AO. OG (hoc eſt OB) ſunt dupla □torum AC. CO. Q. D. *E*.

Vel

Vel in numeris.

Sit AB ꝏ 10. Ergo AC, CB. 5.
Sit BO ꝏ 2. Ergo AO ꝏ 12.
Et CO ꝏ 7.

□ AO 144 } A.
□ OG 4 }

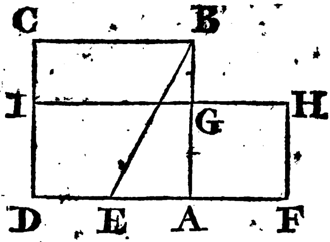
□ AC 25 } M.
□ CO 49 }

□ta OA. OG 148 · □ta AC. CO 74 } A.
2

Bis □ta AC. CO 148

PROPOSITIO. XI.

Probl. I. *Datam rectam AB ita ſecare in G, ut rectangulum comprehenſum ſub tota linea AB & uno ſegmentorum BG ſit æquale alterius ſegmenti AG quadrato.*



CONSTRUCTIO.

1. Ducatur AD perpendicularis & æqualis ipſi AB.
2. Diviſa AD bifariam in E, junge EB
3. Sumatur EF ▭ EB.
4. Fac AG ∞ AF. Et dico factum eſſe quod quæritur.

DEMONSTRATIO.

Supra data AB compleatur □ AC, ut & ſupra AG □ AH & Recta HG producatur in I.

□

▭ DF. FH (hoc eſt FA) + □ EA ∞ [a] □ EF, (hoc eſt □ EB. a 6. 2.

Atqui □ EB ∞ □ AB. ſeu □ AC + □ EA. b 47. 1.

Ergo ▭ DF. FH + □ EA ∞ □ EA + □ AC.

Et ablato utrimque □to EA.

▭ DF. FH [c] ∞ □ AC } S. c Ax. 3.
▭ DG ▭ DG

□ AG ∞ ▭ CG.

Atqui □ AH fit a ſegmento AG & ▭ CG continetur CB hoc eſt AB & altero ſegmento BG.

Ergo patet factum eſſe quod quærebatur.

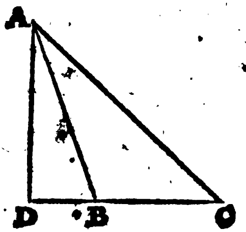
SCHOLIUM.

In numeris hæc propoſitio nullo ſolvi poteſt modo, cum radicis quadratæ extractio, quæ hic requiritur non ſemper rationales numeros admittat.

PROPOSITIO XII.

Theor. 11.

In triangulo obtuſangulo ABC quadratum lateris AC, quod obtuſo angulo opponitur, ſuperat reliquorum laterum AB. BC quadrata, bis ſumpto rectangulo, quod continetur ſub latere CB, & ſub ipſa BD in directum ei addita uſque ad perpendicularem ab altero acuto angulo A cadentem.



De

DEMONSTRATIO.

□ AC ꝏ [a] □ AD + □ DC. a 47. 1.

Atqui □ DC [b] ꝏ □ DB + □ BC + 2 ▭ DBC. b 4. 11.

Ergo hiſce in locum □ DC poſitis.

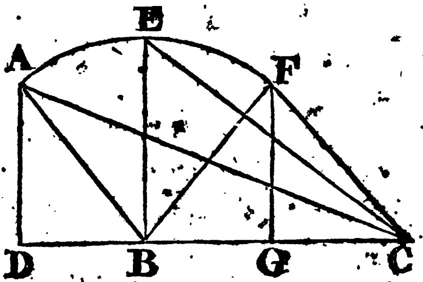
□ AC ꝏ □ AD + □ DB + □ BC + 2 ▭ DBC.

Atqui rurſus Duo □ta AD. DB ꝏ □ AB. [a]

Ergo hoc in illorum locum repoſito.

□ AC ꝏ □ AB + □ BC + 2 ▭ DBC.

SCHOLIUM. I.



Hoc modo paulo aliter eadem propoſitio demonſtrari poteſt.

Ex B erigatur perpendicularis BE ∞ BA, & ducatur EC.

Hoc facto duo triangula ABC. EBC. habent duo latera AB. BC æqualia ipſis EB. BC: at vero angulum ABC < angulo EBC: Ergo per 24. I. baſis AC erit < EC. Adeoque □ AC < □to EC hoc eſt □tis EB ſ. AB & BC.

Unde patet nihil aliud requiri, quam ut inveniatur differentia □torum AC. EC.

□ AC ꝏ □ AD + □ DC.
Atqui □ DC ꝏ □ DB + □ BC +
2 ▭ DBC.

Ergo.

□ AC ꝏ □ AD + □ DB + □ BC
+ 2 ▭ DBC.

Atqui □ta AD. DB. ꝏ □to AB ſ. EB.

Ergo.

□ AC ꝏ □ EB + □ BC + 2 ▭ DBC
□ EC ꝏ □ EB + □ BC.

Quæ ſi a ſe invicem ſubtrahantur, erit 2 ▭ DBC differentia □torum AC. EC ſeu exceſſus quo □ AC ſuperat □ EC, hoc eſt ▭to EB BC. ſeu AB. BC.

SCHOLIUM II.

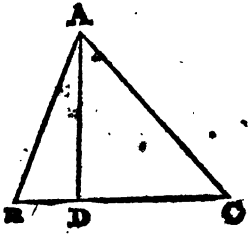
Ex hac propoſitione deducitur generalis Regula Geometrarum, qua ex tribus trianguli obtuſanguli lateribus cognitis inveniunt baſin productam vel illius ſegmentum BD. quæ imperat, ut a □to AC demta ſumma □torum AB. BC, reliquum dividatur per duplum baſeos BC; quæ operatio exhibebit quæſitam DB.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Theor. 12.

In acutangulo triangulo ABC quadratum lateris AB, quod acuto angulo C opponitur, ſuperatur a quadratis reliquorum laterum AC. BC, bis ſumto rectangulo ſub latere CB & ſub aſſumpta interius linea CD uſque ad occurſum perpendicularis ab altero angulo acuto A cadentis.



De-

DEMONSTRATIO.

□*B*C + □DC ꝏ [a] 2 ▭ *B*C. CD + □*B*D. } A. a 7. 11.
□AD □AD

□*B*C + □AD + □DC ꝏ □AD + □D*B* + 2 ▭ *B*CD.

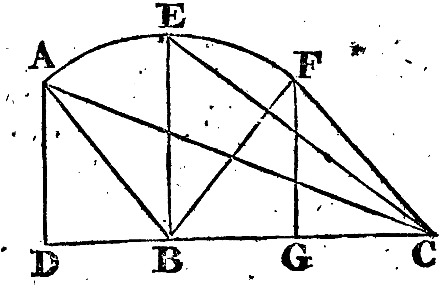
Atqui duo □ta AD. DC ꝏ □AC.
Et duo □ta AD. D*B* ꝏ □AB. } 47. I.

Ergo his in illorum locum ſubſtitutis.

□*BC* + □AC ꝏ □*AB* + 2 ▭ *BC. CD.*

Q. *E.* D.

Alia demonſtratio.



Triangulum acutangulum ſit, *FBC*, demonſtrandum eſt duo □ta *FB*. *BC*, ſuperare □ *FC* per duplum ▭ *CBG*.

Ex B erigatur perpendicularis *BE* ∞ *BF*, & ducatur *EC*, tum duo triangula *EBC*. *FBC*, habebunt duo latera *EB*. *BC*, ∞ lateribus *FB*. *BC* & angulum *EBC* < *F*BC: quare per 24. I. latus EC erit < FC. Adeoque EC hoc eſt duo □ta EB. ſeu FB. BC erunt < □ FC.

Unde

Unde ſi □ FC ſubtrahatur a □ EC, obtinebitur differentia ſeu exceſſus, quo □ta FB. BC ſuperaut □ FC, adeoque demonſtrata erit propoſitio.

□EC ꝏ □EB ſ. □FB + □BC.

Atqui

□BC ꝏ □BG + 2 ▭BGC + □GC.

Ergo facta ſubſtitutione

□EC ꝏ □FB + □BG + 2 ▭BGC + □GC S

□FC ꝏ □FB + □BG + □BC.

□EC − □FC ꝏ 2 □BG. ſ. 2 ▭BG. BG + 2 ▭GC. BG

ſeu

2 ▭BC. BG.

Hoc eſt duplum ▭ ſub baſi BC & ſegmento *B*G; pro differentia qua □ EC, hoc eſt duo □ta EB. ſ. FB + *B*C excedunt □ FC.

SCHOLIUM I.

Simili operatione quoque innoteſcet, differentia □torum AC & FC: quorum primum oppo-

nitur angulo obtuſo ABC. alterum vero acuto FBC.

□AC ꝏ □*AB* + □*BC* + 2 ▭ D*B*.*B*C. 12. II.
□CF ꝏ □F*B* ſeu □*AB* + □ *BC* 2 ▭ *B*G.*B*C. 13. II.
S

□AC − □CF ꝏ 2 ▭ D*B*.*B*C + 2 ▭ BG.BC.
ſeu 2 ▭ DG.BC.

Ex quo calculo ſequitur hoc Theorema.

Si triangulum obtuſangulum ABC cum acutangulo F*B*C latera AB. BC lateribus FB. BC æqualia habeat; quadratum lateris obtuſo angulo oppoſiti AC, ſuperabit quadratum lateris acuto angulo oppoſiti FC, per duplum rectangulum quod fit a baſi BC, & DG inter duas perpendiculares AD. FG intercepta.

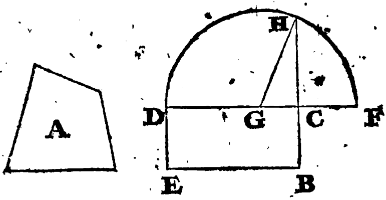
Scho-

SCHOLIUM II.

Hinc iterum fluit Geometrarum regula ad inveniendum baſeos ſegmentum CD, ex tribus trianguli acutanguli lateribus cognitis: quod invenitur ſi a ſumma □torum AC. CB. (circa angulum ſegmento adjacentem) ſubtrahatur □ AC, & reliquum per duplam baſin BC dividatur.

PROPOSITIO XIV.

Prob. 2. *Dato rectilineo A æquale quadratum conſtituere.*



CONSTRUCTIO.

a 45. 1. 1. Conſtituatur □ BD ∞ rectilineo A: quod ſi habeat latera æqualia. obtinemus quadratum quæſitum. Si vero non tum.

2. Producatur latus DC in F, ut CF ſit ∞ CB.

3. Linea DF biſecta in G, centro G radio GD vel GF deſcribe ſemicirculum DHF.

4. Latus BC producatur ad ſemicirculum in H.

Dico □ CH eſſe ∞ rectilineo A.

De-

DEMONSTRATIO.

▭ DC. CB (ſeu CF) + □ GC [b] ∞ □ GF. ſ. □ GH. [b 5. II.]

Atqui □ GH [c] ∞ □ GC + □ CH. [c 47. I.]

Ergo his in illius locum ſubſtitutis.

▭ DC. CB + □ GC ∞ □ GC + □ CH.

Si auferatur utrimque □ GC.

▭ DCB ∞ □ CH.

Atqui ▭ DCB ∞ rectilineo A per conſtr.

Ergo □ CH etiam eſt ∞ eidem rectilineo A.

Q. E. D.

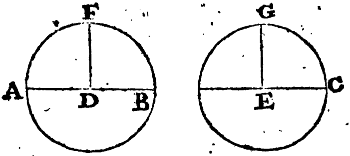
Elementorum Libi Secundi Finis.

Eu-

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

I.



Æquales circuli ſunt, quorum diametri AB. BC. *ſunt æquales: vel quorum, quæ ex centris* D. & E. *rectæ lineæ* DF. EG. *ſunt æquales.*

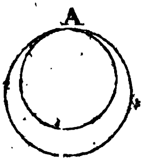
II.



Recta circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat puta in B. *ſi producatur* in C. *circulum non ſecat.*

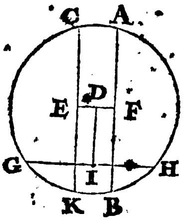
III.

III.



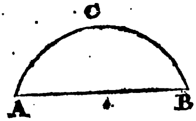
Circuli ſe mutuo tangere dicuntur qui ſeſe mutuo tangentes ut in A. *ſeſe mutuo non ſecant.*

IV.



In circulo æqualiter diſtare à centro rectæ dicuntur, cum perpendiculares D E. DF. *à centro* D. *ad ipſas* AB. CK. *ductæ æquales ſunt; longiùs autem abeſſe dicitur* GH. *in quam major perpendicularis* DI. *cadit.*

V.



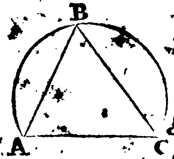
Segmentum circuli, eſt figura quæ ſub recta A B. *&* *circuli peripheria* ACB. *comprehenditur.*

VI.



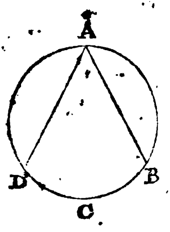
Segmenti autem angulus eſt C A B. *qui ſub recta linea* A B. *& circuli peripheria* C A. *comprehenditur.*

VII.



In ſegmento autem angulus eſt, puta A B C. *cum in ſegmenti circumferentia ſumptum fuerit punctum quodpiam* B. *& ab eo in terminos rectæ* A C. *ſegmentum terminantes, lineæ rectæ ut* B A. B C. *fuerunt ductæ.*

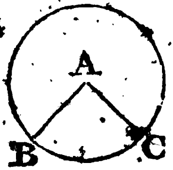
VIII.



Cum vero comprehendentes angulum D A B. *rectæ* A D. A B. *aliquam aſſumunt peripheriam ut* B C D. *illi angulus dicitur inſiſtere.*

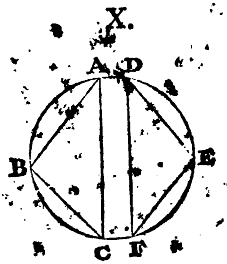
IX.

IX.



Sector circuli eſt, cum ad ipſius circuli centrum A. *angulus* B A C. *fuerit conſtitutus: comprehenſa nimirum figura & à rectis* AB. AC. *angulum* BAC. *continentibus, & à peripheria* BC. *ab illis aſſumpta.*

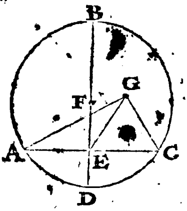
X.



Similia circuli ſegmenta ſunt ABC. DEF. *quæ angulos* B A C. E D F. *capiunt æquales; aut in quibus anguli* C B A. F E D. *inter ſe ſunt æquales.*

PROPOSITIO I.

Probl. I.



Dati circuli ABC centrum F reperire.

CONSTRUCTIO.

a 10. I. 1. Ducta quælibet AC, [a] dividatur biſariam in E.

b 11. I. 2. Ex E, erigatur utrinque [b] perpendicularis BD uſque peripheriam.

3. Illa biſariam dividatur in F.

Dico punctum F eſſe centrum circuli.

DEMONSTRATIO.

Centrum aut eſt in BD, aut extra illam.

Si ſit in BD, neceſſario eſt in puncto, quod illam dividit biſariam; quia Circuli radii ſunt æquales; adeoque centrum eſt in F.

Si juxta Adverſarium ſit extra BD, ponatur illud ex: gr: in G: tum ductis

AG.

AG. EG. CG in triangulis GEA. GEC.

Latus GA ∞ [c] GG. quia ponuntur radii. c Def. 15. I.
Latus EA ∞ EC per conſtructionem.
Latus GE commune.

Ergo [d] omnes anguli ſunt æquales d 8. I.
adeoque Ang. GEA ∞ GEC.

Ergo GEA eſt rectus.
Atqui BEA eſt rectus per conſtructionem. e Def. 10. I.

Ergo ang. GEA ∞ BEA. totum & pars, quod eſt abſurdum.

Et eadem demonſtratio obtinet in omnibus punctis quæ poſſunt aſſignari extra lineam BD: unde concludendum eſt illud extra BD non reperiri.

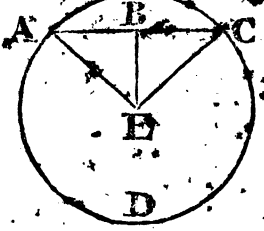
Ergo in BD & quidem ejus puncto F illud erit. Q. E. D.

COROLLARIUM.

Si linea recta in Circulo aliam lineam rectam bifariam & ad angulos rectos ſecat; in illa ſecante erit centrum.

PROPOSITIO II.

Theor. I. *Si in peripheria Circuli ADC duo quælibet puncta A. C. ſumantur, recta AC, quæ per illa ducitur, intra circulum cadit.*



DEMONSTRATIO.

Ex invento Centro E. ductis radiis EA, EC, ad rectam AC ducatur EB:
Tum in Triangulo. EAC.
Latus EA ∞ EC quia radii.

Ergo ang. A ∞ C. 5.I.

Atqui

Atqui externus EBA a < interno C. a 16. I.

Ergò EBA etiam < A.

Adeoque in triangulo EBA latus EA oppoſitum angulo maximo erit b < latere EB. b 19. I.

Atqui latus EA pertingit tantum ad peripheriam.

Ergo latus EB cadit intra circulum.

Et eadem demonſtratio applicari poteſt ad omnia puncta lineæ AC.

Ergo tota linea AC cadit intra Circulum. Q. E. D.

COROLLARIUM.

Linea recta Circulum tantum in uno puncto tangit.

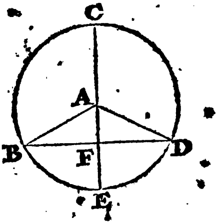
PRO-

PROPOSITIO III.

Theor. 2.

PARS I.

Si in circulo recta quædam CE per centrum A ducta, aliam BD non per centrum ductam, bifariam in F ſecet; etiam illam ad angulos rectos ſecabit.



PARS II.

Et ſi ad angulos rectos eam ſecet; bifariam quoque ſecabit.

DEMONSTRATIO.

Pars I. Ductis radiis AB, AD, in triangulis AFB, AFD,

Latus

Latus AB ꝏ AD quia radii.
Latus FB ꝏ FD per propoſitionem.
Latus AF commune.

Ergo omnes anguli ſunt inter ſe æquales, per 8. I. adeoque Ang. AFB ꝏ AFD. qui propterea ſunt [a] recti. a Def. 10. I.

Pars 2. In iiſdem triangulis AFB, AFD.

Ang. ABF ꝏ ADF. qui triang. BAD eſt Iſoſceles.
Ang. AFB ꝏ AFD per propoſitionem.
Latus AF commune.

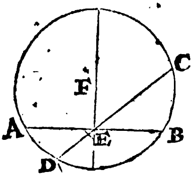
Ergo latus BF [b] ꝏ FD. b 26. I.

Q. E. D.

COROLLARIUM.

In omni triangulo æquilatero ſeu Iſoſcele linea recta baſin bifariam ſecans, ad eandem perpendicularis eſt & contra.

Theor. 3. PROPOSITIO. IV.



Si in circulo duæ rectæ AB. DC non ambæ per centrum ductæ, ſe invicem ſecent: illæ ſeſe non ſecabant bifariam.

DEMONSTRATIO.

Duplex hic obtinet caſus.

Caſus I. Aut una tantum tranſit per centrum, ut ex: gr: FE, patet illam ab altera CB non ſecari bifariam: quia illa per hypotheſin non tranſit per centrum.

Caſus 2. Aut neutra tranſit per centrum.

Si jam Adverſarius contendat duas lineas AB. DC ſe mutuo ſecare bifariam in E, ex centro F, ducatur recta FE.

Tum FE ſecat AB bifariam. Ergo a ang. FEB eſt rectus.

a 3. III.

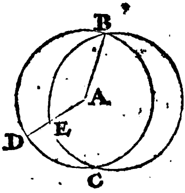
Eadem FE ſecat DC bifariam. Ergo a ang. FEC eſt rectus.

Ergo erit ang FEB ∞ FEC. Totum & pars: quod eſt abſurdum.

PRO-

PROPOSITIO V.

Theor. 4.



Si duo circuli BDCB. BEC, ſeſe mutuo ſecent non habebunt idem centrum.

DEMONSTRATIO.

Si quis ponat A eſſe commune utriuſque centrum, ducatur AB ab illo centro A ad punctum interſectionis B. ut & AD.

Linea AB ∞ AD; quia radii circuli BDC.

AB ∞ AE. quia radii circuli BEC.

Ergo AD [a] ∞ AE. Quod eſt abſurdum. a Ax. I.

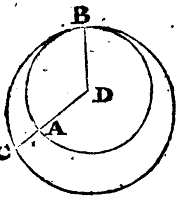
At eadem demonſtratio obtinet in omnibus punctis, quæ intra commune utriuſque circuli ſpatium ſunt poſita.

Ergo univerſim patet veritas propoſitionis. Q. D. E.

Theor. 5.

PROPOSITIO VI.

Si duo circuli BA. BC ſe mutuo interius tangant in B: non erit illorum idem centrum.



DEMONSTRATIO.

Si contendat aliquis punctum ex: gr: D eſſe commune illorum centrum; ductis D*B*. DC erit.

D*B* ∞ DC. quia ſunt radii circuli *BC*.

D*B* ∞ DA, quia ſunt radii circuli *B*A.

Ergo

Ergo DC [a] ∞ DA. Totum & [a] Ax. 1. pars: quod eſt abſurdum.

Adeoque cum eadem demonſtratio omnibus punctis utrique circulo communibus poſſit applicari, non habebunt iſti circuli unum & idem centrum.

Q. E. D.

Theor. 7.

PROPOSITIO VII.

Si in circulo quovis extra centrum F accipiatur punctum G, ex quo quædam rectæ GA GC. GD. GE. GN. in circulum cadant.

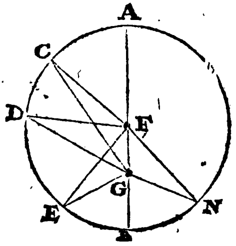
Tum

1. *Maxima erit GA, quæ per centrum F tranſit.*

2. *Minima erit reliqua diametri pars GB.*

3. *Aliarum vero major eſt GC, quæ maximæ GA propter.*

4. *Neque plures quam duæ ab illo puncto G ad circumferentiam duci poſſunt æquales.*



De-

DEMONSTRATIO.

Pars 1. Ductâ FC. in triangulo GFC
Duo latera GF. FC < [a] GC. a 20. I.
Atqui. GF. FC ꝏ GA. quia FC ꝏ FA.

Ergo GA < GC.

Pars 2. Ducta GE. In Triangulo FGE
Duo latera FG. GE [a] < FE. hoc est FB.
FG FG

GE [b] < GB. b Ax. 4.

Pars 3. Ducta GD, in triangulis CFG. DFG.
Latus CF ꝏ DF.
Latus FG utrique commune.
Sed Ang. CFG < DFG.

Ergo baſis CG [c] < DG. c 24. I.

Pars 4. Patet ex præcedentibus; nam ſi tres poſſent æquales GD. GE. GN duci; tum forent duæ GD. GE ad eandem partem inter ſe æquales.
Quod repugnat parti 3.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Theor. 7.

Si a puncto A extra circulum accepto ad circulum ducantur quædam rectæ AH. AG. AF.

1. *Earum quæ in cavam peripheriam incidunt maxima erit AH, quæ per centrum L tranſit.*

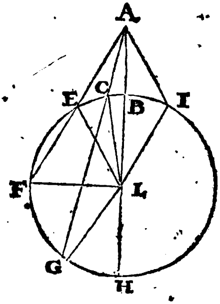
2. *Aliarum major eſt ea, AG, quæ maximæ AH propior.*

3. *Extra circulum minima eſt AB, quæ producta per centrum tranſit.*

4. *Quæ minimæ propior AC remotiore AE minor erit.*

5. Non

5. Non plures quam duæ ex dicto puncto A in peripheriam duci poſſunt æquales ſive intra circulum, ſive extra.



DEMONSTRATIO.

Pars I. Ducta recta LG. in triangulo ALG.

Duo latera [a] AL..LG $\lessdot$ AG. a 20. I.

Atqui AL. LG ꝏ AH. quia LG ꝏ LH.

Ergo AH $\lessdot$ AG.

Pars 2. Ducta linea LF, in triangulis ALG. ALF.

Latus AL utrique commune.
Latus LG ∞ LF. quia ſunt radii.
Atqui ang. ALG < ALF.

---

b 24. 1. Ergo baſis AG b < baſi AF.

Pars 3. Ducta LC. in triangulo ACL.

Duo latera AC. CL. b < AL.) S
CL. ∞ BL.)

---

c Ax. 4. Remanet AC < c AB.

Pars 4. Ducta LE, in triangulis AEL. ACL.

Duo latera exteriora
d 21. 1. AE. EL d < AC. CL.) S
LE ∞ LC.)

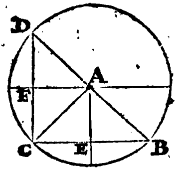
Remanet AE < AC.

Pars 5. Patet ex præcedentibus; nam ducta AI ∞ AE. quæ intra AI ducitur erit illâ minor: quæ extra. illâ major: adeoque ex A non poſſunt duci plures quam duæ quæ ſint æquales. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Theor. 8.



Si ab aliquo intra Circulum puncto A plures quam duæ rectæ æquales AB. AC. AD ad peripheriam duci poſſint: Illud punctum erit centrum.

DEMONSTRATIO.

Ductas rectas DC CB. divide biſariam in F & E per rectas FA. EA.

Tum in triangulis AFD. AFC.

Latus AF utrique commune.

Latus AD ∞ AC. per propoſitionem.

Latus FD ∞ FC. per conſtructionem.

Ergo Ang. AFD [a] ∞ AFC, & uterque [b] rectus: adeoque in perpendiculari FA erit centrum. [c]

a 8. I.
b Def. 10. I.
c Coroll. I. III.

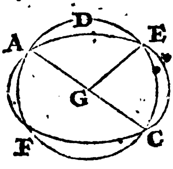
Deinde eodem modo per triangula AEC. AEB demonſtratur centrum etiam eſſe in perpendiculari EA.

Ergo neceſſario erit in puncto interſectionis A. quia duæ lineæ FA. EA præter illud nullum habent commune.

Q. E. D.

PROPOSITIO X.

Theor. 9.



Duo circuli ADE. AFC ſe mutuo non ſecant in pluribus quam duabus punctis.

DEMONSTRATIO.

Juxta Adverſarii opinionem ponantur ſe invicem ſecare in tribus punctis A. E. C. Tum ex invento circuli ADE centro G. ducantur rectæ. GA. GE. GC: quæ ſunt æquales: quia ſunt radii circuli ADE.

Atqui tres iſtæ æquales GA. GE GC etiam pertingunt ad peripheriam alterius circuli AFC: ergo punctum G illius quoque a erit centrum.

a 9. II.

Adeoque duo circuli ſe invicem ſecantes haberent idem centrum. b quod eſt abſurdum.

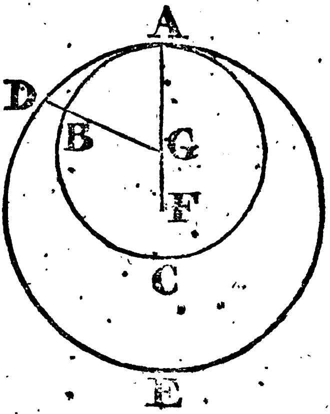
b 5. III.

Pro-

PROPOSITIO XI.

Theor. 10.

Si duo circuli ſe interius tangant in A, recta FG illorum centra F. G. conjungens, ſi producatur, tranſibit per contactum A.



DEMONSTRATIO.

Si juxta Adverſarium non cadat in A; cadat aliorſum in D.

Tum

S { Recta FGD ∞ FGA quia ſunt radii majoris circuli.
FG FG

GD ∞ GA.

Atqui GB ∞ GA. quia ſunt radii minoris circuli.

Ergo GD ∞ GB. Totum & pars. quod eſt abſurdum.

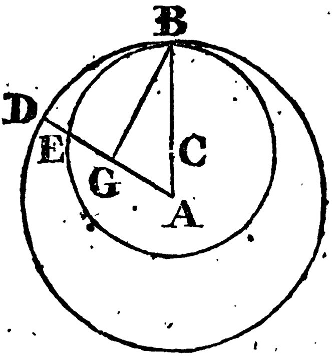
Atqui eadem demonſtratio habet locum quandiu inter puncta D & B manet aliquod interſtitum; ſeu quandiu illa puncta non coincidunt hoc eſt quandiu linea GD non tranſit per contactum.

Ergo FG producta cadit in contactum A.

Q. E. D.

Scho-

SCHOLIUM.



Poteſt hæc propoſitio ſic converti.

Si duo circuli ſe mutuo interius tangant, & a puncto contactus B, ad centrum unius circuli ducatur Recta, tum in illa aut illius producta quoque erit centrum alterius circuli.

DEMONSTRATIO.

Duplex hic obtinet caſus: Aut enim ducta eſt BA ex contactu ad

ad centrum majoris circuli: Aut ducta eſt BC ex contactu ad centrum minoris circuli C.

CASUS I.

Si centrum minoris circuli non ſit in linea BA, ſit extra illam in puncto G. ducantur lineæ BG & AD per G.

A. { GE ∞ GB. quia ſunt radii minoris circuli.
AG AG. juxta Adv.

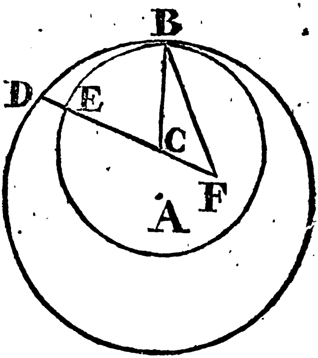
AE ∞ AG + GB.

Atqui AG + GB < AB. ſ. AD. 20.1.

Ergo AE < AD. pars major toto.

Et eadem demonſtratio habet locum in omnibus punctis aſſignatis extra lineam BA. Ergo centrum minoris circuli reperitur in linea BA.

CASUS II.



Sit centrum majoris Circuli extra rectam BC, aut illius productam, in puncto F. Ducantur BF & DF per C.

Eritque

A { CE ∝ CB. quia radii minoris circuli.
  { CF   CF.

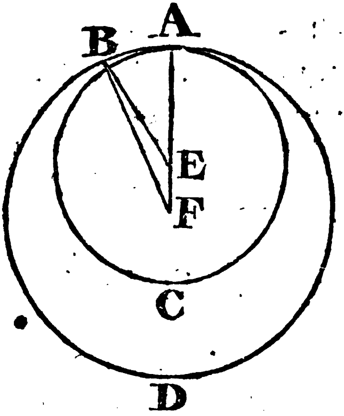
FE ∝ FC + CB,
Atqui FC + CB < FB ſ. FD.

Ergo FE < FD. pars toto.
Q. E. A.

Theor. 12.

PROPOSITIO XIII.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis quam uno; ſive intus, ſive extra tangat.



DEMONSTRATIO.

Caſus I. Circulus ABC tangat (juxta Adverſarium) in duobus punctis A & B:

a 11. 11. Tum recta FE, tendet a ad puncta contactus A & B; ducatur FB.

FE + EB ∞ FA, quia ſunt radii ejuſdem circuli.

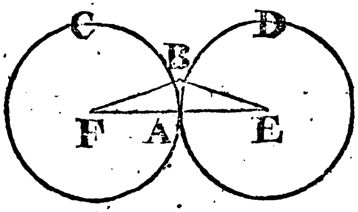
At-

Atqui FB ∞ FA propter eandem rationem.

Ergo FE + EB ∞ FB. Quod eſt abſurdum. b b 20. I.

Caſus II. Circulus ABC (ſi non in uno) in duobus punctis tangat circulum ABD. ſc. in A & B, Recta FE quæ centra conjungit tranſit per c contactum A: c 12. II.

Atqui (juxta adverſium, qui etiam contactum in B ponit) illa etiam tranſit per B, ut linea FBE ſit linea recta.



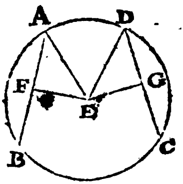
Ergo hinc ſequeretur duas rectas FBE, FAE comprehendere ſpatium. Quod eſt abſurdum. d Ax. 12.

PROPOSITIO. XIV.

Theor. 13.

1. *Æquales rectæ AB. DC. in circulo æqualiter a centro diſtant.*

2. *Et æqualiter a centro diſtantes inter ſe æquales ſunt.*



DEMONSTRATIO.

PARS I.

Ex centro E ductæ perpendiculares EF. EG, lineas[a] AB. DC biſecabunt; & quia totæ ſunt æquales erunt & ſemiſſes AF. DG æquales: ducantur radii EA. ED. In triangulis rectangulis *AFE DGE.*

a 3. III.

ita

□ta *AF*. *FE* ∞ □ *AE*.
□ta *DG*. *GE* ∞ □ *DE*. } 47. I.

Atqui □ *AE* ∞ □ *DE*. quia fiunt a radiis.

Ergo □ta *AF*. *FE*. ∞ □tis DG *GE*
S □ *AF* ∞ □ *DG*.

Remanet □ FE ∞ □ GE.

Ergo linea *FE* ∞ GE adeoque diſtantiæ æquales.

PARS II.

Supra erant
□ta *AF* *FE* ∞ □tis DG *GE*
□ *FE* ∞ □ *GE*. } S

□ *AF* ∞ □ DG.

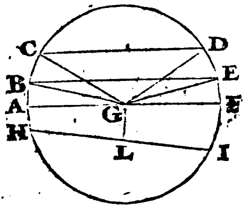
Ergo ipſa *AF* ∞ DG. & ipſarum dupla.

AB [b] ∞ DC. Q. D. E. b Ax. 6.

Pro-

PROPOSITIO XV.

Theor. 14.



1. *In circulo ABCD rectarum inſcriptarum maxima eſt Diameter AF.*

2. *Reliquarum vero ea BE major quæ centro propior.*

DEMONSTRATIO.

Pars I. Ductis GB. GE. in triangulo BGE.

a 20. I. Duo latera a BG. GE < BE.
Atqui BG. GE ∞ AF. Diametro.

Ergo AF < BE.

Pars II. Ductis GC. GD: in triangulis BGE. CGD.

Latus BG ∞ CG } Quia ſunt
Latus GE ∞ GD } radii.
At ang. BGE < CGD.

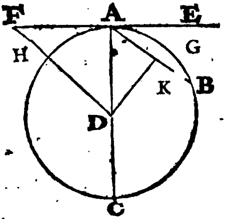
---

b 24. I. Ergo baſis BE b < CD.
Q. D. E.

Pro-

PROPOSITIO XVI.

Theor. 15.



Si per extremitatem diametri A ducatur perpendicularis FE.

1. Illa cadet extra circulum.

2. Neque inter ipſam & circulum alia recta ad contactum A duci poteſt, quæ circulum non ſecet.

DEMONSTRATIO.

Pars I. Ex centro D ad quodlibet punctum F ducta DF, erit in triangulo DAF.

Angulus A $\lhd$ F. quia angulus A rectus.

Ergo Latus (a) DF $\lhd$ latere DA. a 19. I.

Atqui DH ꝏ DA. quia ſunt radii.

Ergo DF $\lhd$ DH. Adeoque quia punctum H eſt in circumferentia erit F extra.

Idem ratiocinium omnibus punctis lineæ FAE poteſt applicari: adeoque tota FE (excepto puncto A) erit extra circulum.

Pars 2. Ponat adverſarius rectam AB poſſe duci inter AE. & circulum abſque circuli ſectione. Ex centro D ad AB ducatur perpendicularis DK. Eritque in triangulo DKA.

Ang. DKA < DAK.

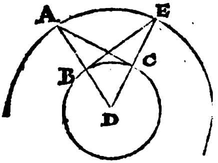
b 19. 1. Ergo latus DA b < DK.

Atqui DA pertingit ad peripheriam. Ergo cadit DK. intra Circulum; adeoque linea AK illum ſecat.

COROLLARIUM.

Hinc rurſus paret rectam lineam Circulum tantum in uno puncto tangere: nam demonſtratum eſt totam rectam FE cadere extra circulum excepto unico puncto A; adeoque in illo ſeſe tantum contingunt.

PROPOSITIO XVII. Probl. 2.



A dato puncto A rectam lineam AC ducere quæ circulum datum BCD tangat.

CONSTRUCTIO.

1. Ex puncto A ad centrum ducatur recta AD.

2. Centro D radio DA deſcribatur circuli arcus AE.

3. Ex puncto B erigatur perpendicularis BE.

4. Juncta ED, ducatur AC.

Dico lineam AC tangere circulum:

DEMONSTRATIO.

In triangulis ADC. EDB.

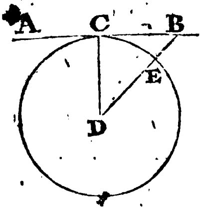
Latus AD ꝏ ED } Quia ſunt radii eo-
Latus DC ꝏ DB } rumdem circulorum.
Angulus D communis.

Ergo [a] Ang. ACD ꝏ EBD. a 4. I.
Atqui Ang. EBD eſt rectus per conſt.

Ergo etiam ACD eſt rectus: adeoque lineaAC [b] tangit circulum. b 16. III.

Theor. 16.

PROPOSITIO XVIII.



Si recta linea AB tangat circulum, quæ ex centro D ad contactum C ducitur DC; illa tangenti AB perpendicularis erit.

DEMONSTRATIO.

Si neget Adverſarius; Sit alia quædam DB perpendicularis ad tangentem: tum in triangulo DCB,

Angulus DBC $<$ DCB. juxta Adverſarium.

a 19. 1.

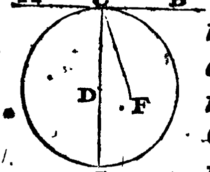
Ergo latus DC $<$ DB.[a]
Atqui DC ∞ DE.

b Ax. 9. Ergo DE $<$ DB. Pars major toto: quod eſt [b] abſurdum. Et eadem demonſtratio habet locum in omnibus punctis lineæ CB.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

Theor. 17.



Si recta linea AB tangat circulum, & ex contactu C ducatur perpendicularis CE in illa erit centrum.

DEMONSTRATIO.

Si hoc ab Adverſario negetur; alibi centrum aſſignare debet: Sit hoc in F: tum ducta FC erit

Ang. ECB rectus. per propoſit.

Atqui FCB [a] etiam rectus juxta poſitionem Adverſarii. a 18. III.

Ergo ECB ꝏ FCB. Totum & pars: quod eſt abſurdum.

Eadem autem demonſtratio locum habet ubicunque ab adverſario centrum ponatur extra lineam CE.

Ergo in linea CE reperitur centrum.

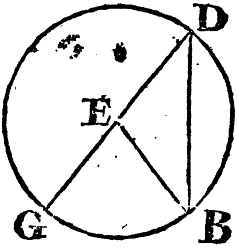
Q. E. D.

PROPOSITIO XX.

Theor. 18.

Angulus ad Centrum GEB duplus eſt anguli GDB ad peripheriam, cum idem arcus GB eſt baſis angulorum.

DEMONSTRATIO.



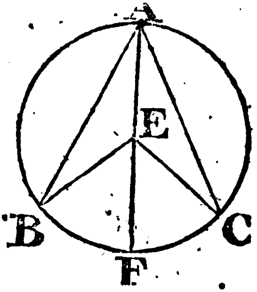
Caſus I. In triangulo Iſoſcele

Angulus GEB ∞ ang. D + B. 16.1.

Atqui D ∞ B. 5. I.

Ergo GEB. duplus anguli D.

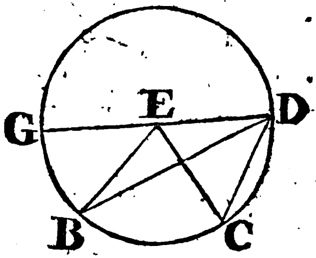
Ca-



Caſus 2. Ducta AF per centrum E,

A ⎰Ang. BEF duplus ang. BAF.⎱ per ca-
⎱Ang. CEF duplus ang. CAF⎰ ſum. I.

Totus BEC duplus totius BAC.



Caſus 3. Totus Ang. GEC eſt duplus totius GDC.
Partialis GEB eſt duplus partialis GDB. } S

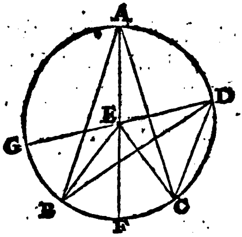
Remanet BEC duplus BDC. Q. E. D.

PRO-

Theor. 19.

PROPOSITIO XXI.

In circulo, qui eidem arcui BC inſiſtunt anguli BAC. BDC, ſeu qui ſunt in eodem ſegmento, ſunt inter ſe æquales.



DEMONSTRATIO.

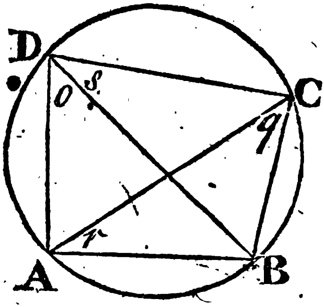
Angulus BEC eſt duplus BAC
Atqui id. BEC eſt duplus BDC } 20. III.

Ergo BAC [a] ꝏ BDC.

a Ax. 7.

Pro

PROPOSITIO. XXII. Theor. 20.



Quadrilateri circulo inſcripti ABCD anguli oppoſiti D.B. duobus rectis ſunt æquales.

DEMONSTRATIO.

Ductis diagonalibus AC. BD.

A { Ang. O ∞ Q. [a] quia inſiſtunt arcui AB. — a 21. III.
Ang. S ∞ R. [a] quia inſiſtunt arcui CB. }

Totus angulus ADC ∞ Q + R. } A.
Angulus ABC ∞ ABC.

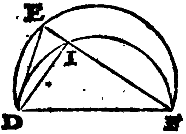
Duo anguli ADC. ABC ∞ tribus Q + R + ABC.

Atqui hi tres ſunt ∞ 2 Rectis.
Ergo & duo ADC + ABC ∞ 2 Rectis. Q.E.D.

Theor. 21.

PROPOSITIO. XXIII.

Si ſuper eadem recta DF conſtituta ſint duo ſegmenta circulorum inæqualia; illa non ſunt ſimilia.



DEMONSTRATIO.

Si contendat Adverſarius illa eſſe ſimilia; ducantur rectæ FE. ED. DI.

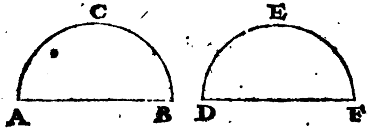
a Def. 10. III. Ang. DEF $=$ DIF juxta a Adverſarium
Atqui DEF $>$ DIF. per 16. I.

Quæ duo ſunt contradictoria.

Pro-

PROPOSITIO XXIV. Theor. 22.

Segmenta ſimilia ACB. DEF, ſuper æqualibus rectis AB. DF conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.



DEMONSTRATIO.

Superponatur AB ipſi DF, aut congruent aut non.

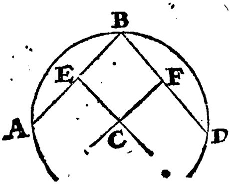
Si non: tum peripheria ACD.

Vel cadet tota intra vel extra peripheriam DEF: contra præcedentem.

Vel interſecabit peripheriam DEF: tunc circulus circulum ſecabit in pluribus quam duobus punctis: contra 10. hujus.

Ergo congruent: adeoque ſunt a æqualia. Q. E. D. a Ax. 8.

Probl. 3. # PROPOSITIO XXV.



Circuli datum arcum ABD perficere.

CONSTRUCTIO.

1. Tria puncta ad libitum ſumpta A. B. D. jungantur rectis AB. BD.

2. Dividantur bifariam per perpendiculares EC. FC.

Dico in illarum interſectionis puncto C eſſe arcus dati centrum quæſitum.

DEMONSTRATIO.

Centrum eſt in perpendiculari EC.
Ut & in perpendiculari a FC.

a Cor. 1. III.

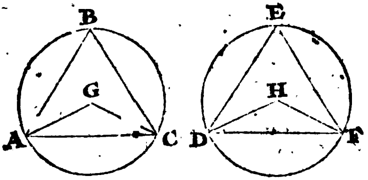
Ergo eſt in puncto interſectionis; quia illud tantum habent commune, & circuli unicum tantum eſt centrum.

Adeoque ex centro C arcus perfici poterit. Q. E. F.

Pro-

PROPOSITIO XXVI. Theor. 23.

Si in circulis æqualibus anguli ſive ad centra. G. H, ſive ad peripheriam B. E. ſint æquales: tunc etiam arcus AC. DF, quibus inſiſtunt, erunt æquales.



DEMONSTRATIO.

Ductis rectis AC. DF. in triangulis AGC. DHF.

Latus AG ∞ DH } Quia ſunt radii circulorum æqualium.
Latus GC ∞ HF
Augulus G ∞ H. per propoſitionem.

Ergo Baſis AC a ∞ DF. a 4. I.

Fiant jam anguli B. E. ad peripheriam ductis AB. BC. DE. EF.

Quia autem angulorum ad centra G.H æqualium ſemiſſes ad peripheriam B.E. etiam ſunt æquales ; ſegmenta ABC DEF erunt b ſimilia: adeoque quia ſuper æqualibus rectis ſunt conſtituta, erunt æqualia: Quæ ſi a totis circulis æqualibus auferantur remanebunt arcus AC. DF inter ſe æquales.

b Def. 10. III.

Pars 2. Hæc eodem fere ratiocinio demonſtratur.

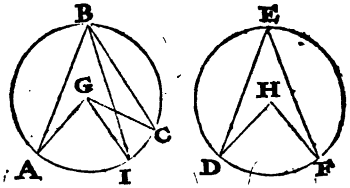
Sed notandum in parte prima figuras debere conſiderari ſine angulis ad peripheriam; qui in demonſtratione demum conſtrui debent.

Sic etiam in parte ſecunda ſpectari debent abſque angulis ad centra, quos demonſtratio demum requirit.

Adeoque utriuſque partis demonſtratione ambo anguli & ad centra & ad peripheriam exiguntur: cum per illos demonſtretur æqualitas rectarum; per hos vero ſimilitudo ſegmentorum; quæ utraque neceſſaria ſunt.

PROPOSITIO XXVII. T cor. 24.

Si in æqualibus circulis arcus AI. DF. ſint æquales, anguli illis inſiſtentes ſive ad centra G. H. ſive ad peripherias. B. E. ſunt inter ſe æquales.



DEMONSTRATIO.

Pars I. Si non ſit angulus G ∞ H.

Erit G > H.

Vel G < H.

Sit G > H. fiatque

Angulus AGC ∞ H.

Ergo [a] Arcus AC ∞ DF.

Atqui Arcus AI ∞ DF per propoſit. a 26. III.

Ergo Arcus AC ∞ AI. Totum & pars: quod eſt abſurdum. Ergo angulus G non eſt minor H.

Eodem modo probatur angulum G non eſſe majorem angulo H.

Ergo ſequitur G eſſe æqualem A.

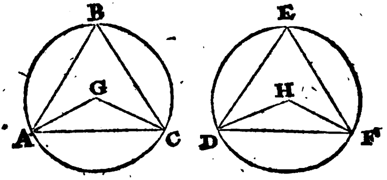
Pars 2. Hæc facile eadem formula demonſtratur.

Pro-

PROPOSITIO XXVIII.

Theor. 25.

Si in circulis æqnalibus ductæ ſint æquales rectæ AC. DF : erunt etiam, quos auſerunt, arcus AC. DF inter ſe æquales.



DEMONSTRATIO.

Ductis rectis GA. GC : HD. HF, in triangulis AGC. DAF.

Latus AG ∞ DH. Quia radii æqua-
Latus GC ∞ HF. lium circulorum.
Baſis AC ∞ DF. per propoſitionem.

Ergo Ang. AGC [a] ∞ DHF.
Adeoque arcus AC [b] ∞ DF.
Q. E. D.

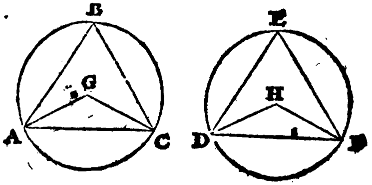
a 8. I.
b 26. III.

Ca-

PROPOSITIO XXIX.

Theor. 26.

Si in æqualibus circulis arcus AC. DF ſint æquales; erunt & ſubtendentes rectæ AC. DF inter ſe æquales.



DEMONSTRATIO.

Ductis GA. GC. HD. HF. erunt in triangulis AGC. DHF.

Latus GA ∞ HD } Quia ſunt radii æ-
Latus GC ∞ HF } qualium circulorum.

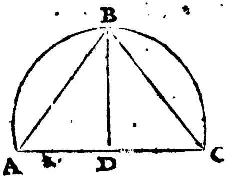
Angulus C ∞ [a] H. quia arcus AC ponitur æqualis DF. a 27. III.

Ergo baſis AC [b] ∞ DF. b 4. I.

Q. D. E.

PROPOSITIO XXX.

Probl. 4.



Datum circuli arcum ABC biſariam ſecare.

CONSTRUCTIO.

1. Ducatur recta AC, dati arcus extremitates conjungens.

2. Illa per perpendicularem DB, biſecetur.

Dico Arcum biſectum eſſe in B.

DEMONSTRATIO.

Ductis rectis AB, CB. erunt in triangulis BDA. BDC.

Latus BD utrique commune.

Latus AD ∞ DC } Per con-
Angulus BDA ∞ BDC } ſtruct.

---

a 4. I. Ergo Baſis BA ∞ a BC.

b 28. I. Adeoque Arcus BA ∞ b BC.

Ergo Arcus ABC diviſus eſt biſariam.

Q. E. D.

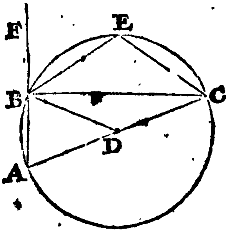
PRO-

PROPOSITIO XXXI. Theor. 27.

1. *Angulus ABC in ſemicirculo rectus eſt.*

2. *In ſegmento majori angulus BAC recto minor.*

3. *In ſegmento vero minori angulus BEC recto major.*



DEMONSTRATIO.

Pars I. Ducta DB, erunt duo triangula DAB. DBC. Iſoſcelia, adeoque anguli ſupra baſes a æquales. a 5. I.

Ergo ang. DBA ꝏ DAB. }
Et ang. DBC ꝏ DCB. } A.

Totus Ang. ABC ꝏ duobus BAC + BCA.

Atqui in triang. ABC omnes tres anguli ſunt ꝏ b 2 Rectis. b 32. I.

Ergo ab una parte angulus ABC eſt rectus, & ab altera duo reliqui BAC. BCA etiam æquales uni recto.

Pars 2. Per partem I duo anguli BAC BCA ſimul conſtituunt unum rectum: ergo ſolus BAC eſt minor recto.

Pars 3. In quadrilatero ABEC.
Duo anguli A + E ∞ c 2 Rectis.
c 22. III. Atqui ang. A > uno recto per partem I.
Ergo ang. E < uno recto.

SCHOLIUM I.

Si trianguli rectanguli hypotenuſa dividatur bifariam, erit punctum biſectionis centrum circuli per tria puncta angularia tranſeuntis: adeoque examen normæ.

SCHOLIUM II.

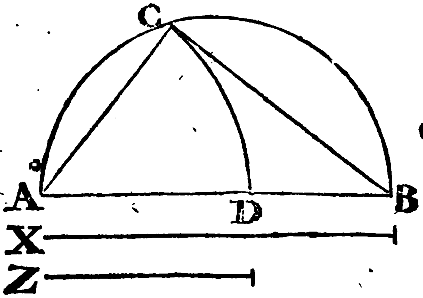
Ex hac propoſitione deducitur ſequens

PROBLEMA.

Minus quadratum Z a majore X ſubtrahere, ſeu exhibere differentiam quadratorum X & Z.

Con-

CONSTRUCTIO.



1. Super AB ꝏ X fiat Semicirculus ACB.

2. In Diametro AB ſumatur AD ꝏ Z.

3. Centro A radio AD deſcribe arcum DC. erit recta AC etiam ꝏ Z.

Dico ducta CB illius □ CB eſſe quæſitam differentiam quadratorum AB. AC.

Demonstratio.

Per propoſ. 31. III. angulus ACB eſt rectus, ergo in triangulo rectangulo ACB eſt

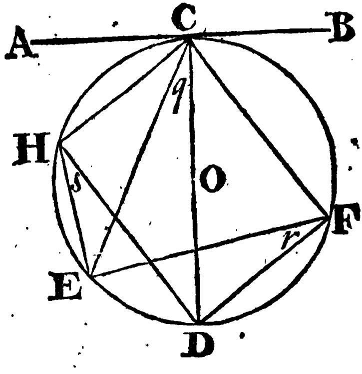
S { □AB ꝏ □AC + □CB per 47. I.
{ □AC □AC,

□AB − □AC ꝏ □CB.

Theor. 28.

PROPOSITIO XXXII.

Si recta linea AB circulum tangat in C, & a contactu ducatur alia circulum ſecans: erit angulus a tangente & ſecante factus æqualis angulo qui fit in alterno ſegmento.



DEMONSTRATIO.

Caſus hic obtinent omnino duo:

Aut enim linea circulum ſecans ad tangentem eſt perpendicularis & tranſit per centrum O, ut CD.

Aut non tranſit: ut CE.

Ca-

CASUS I.

Demonſtrari debet angulum ACD ∞ CFD.

Ang. ACD eſt rectus: per hypoth.
Ut & a CFD eſt rectus: quia eſt in Semicirculo. a 31. III.

Ergo ang. ACD ∞ CFD.

CASUS II.

Ab una parte probari debet eſſe ang. ACE ∞ CFE.

S { Ang. ACD ∞ CFD. per caſum I.
Ang. Q ∞ b R. quia in eodem ſegmento. } b 21. III.

Remanet ang. ACE ∞ CFE.

Ab altera parte probari debet ang. BCE ∞ CHE.

A { Ang. BCD ∞ CHD per caſum I.
Ang. Q ∞ S. quia ſunt eodem ſegmento. }

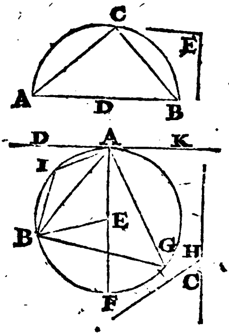
Totus ang. BCE ∞ Toti CHE.

Q. E. D.

Pro-

Probl. 5. ## PROPOSITIO XXXIII.

Super data recta AB ſegmentum circuli conſtruere, quod capiat angulum dato angulo æqualem.



Eſt autem angulus datus vel rectus ut E, vel non rectus ut H. C.

CASUS I.

Conſtructio & Demonſtratio.

a 31. III. Data AB bifariam diviſa in D. Centro D radio DA fiat ſemicirculus ACB. hic capit a angulum rectum ACB, adeoque dato recto E æqualem.

Ca-

CASUS II.

CONSTRUCTIO.

1. Ad datæ BA punctum A ducatur DK, ut angulus DAB ſit æquales [b] angulo dato C. b 31. I.

2. Ex A duc perpendicularem AF.

3. Fiat angulus ABE æqualis angulo BAE.

4. Centro E, radio EA vel EB (quæ per 6. I. ſunt æquales) deſcribe circulum BIAG.

Dico ſegmentum AGB capere angulum dato acuto C æqualem.

Ut & ſegmentum AIB capere angulum data obtuſo H æqualem.

Pars 1. Ang DAB ꝏ [c] AGB, in alterno ſegmento. c 32. III.

Et Ang. DAB ꝏ C per conſtruct.

Ergo Ang. AGB ꝏ C.

Pars 2. In quadrilatero AIBG.

Duo anguli I + G [d] ꝏ 2 Rectis. d 22. III.

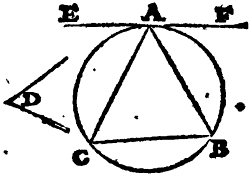
Et duo anguli H + C ꝏ 2 Rectis.

S (Ergo I + G ꝏ H + C.
Atqui G ꝏ [e] C. per partem I. e 32. III.

Ergo I ꝏ H. Q. D. E.

Probl. 6. PROPOSITIO XXXIV.

A dato circulo ABC ſegmentum CBA auferre, capiens angulum B, dato angulo D æqualem.



CONSTRUCTIO.

1. Ducatur recta tangens Circulum in A.

2. Ad A fiat angulus EAC æqualis angulo dato D.

Di-

Dico ſegmentum ABC capere angulum æqualem D.

DEMONSTRATIO.

Ang. EAC ∞ a ABC in alterno ſegmento. a 31. III.

Atqui EAC ∞ D per conſtructionem.

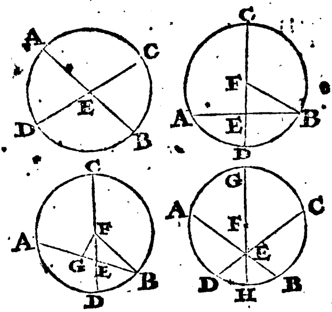
Ergo ABC ∞ D.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXXV.

Theor. 29.

Si in circulo duæ rectæ AB. CD ſe mutuo in E ſecuerint: Rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis unius AE. EB: æquale eſt ei quod ſub ſegmentis alterius CE. ED. comprehenditur rectangulo.



Quatuor diverſi hic occurrere poſſunt caſus.

DEMONSTRATIO.

CASUS I.

Si rectæ AB. CD ſe mutuo ſecent in Centro: tum ▭ AEB erit ∞ ▭ CED: quia quatuor illorum latera ſint radii, adeoque inter ſe æqualia.

Ca-

CASUS II.

Si una C*D* per centrum F ducta alteram AB non per centrum tranſeuntem ſecet bifariam adeoque à perpendiculariter iu E: ducatur FB. a 3. III.

DEMONSTRATIO.

▭ CE*D* + □ FE b ꝏ □ F*D* ſeu □ FB. b 5. III.
Atqui □ FE + □ EB ꝏ □ FB.

Ergo iliis in hujus locum poſitis.

---

c ▭ CE*D* + □ FE ꝏ □ FE + □ EB.
Adeoque dempto utrinque eodem □ FE.

▭ CE*D* ꝏ □ EB hoc eſt ▭ *AEB*.

CASUS III.

Si recta C*D* per centrum F ducta altera non per centrum non dividit bifariam in E.

DEMONSTRATIO.

Ducta FG perpendiculari ad AB, ut & FB tum erit.

□ CED + □ FE ∞ ∞ □ FD hoc eſt □ FB.
□ FG + □ GE 47. I. □ FG + □ GB 47

Sublato utimque □ FG. erit

□ CED + □ GE ∞ □ GB
Sublato □ GE □ AEB + □ GE. 5. II.

□ CED ∞ □ AEB. Q. D. E.

CASUS IV.

Si neutra tranſeat per centrum & ſe mutuo ſecent utcunque.

DEMONSTRATIO.

Ducatur GH. tranſiens per centrum F & per interſectionis punctum E. Tum.

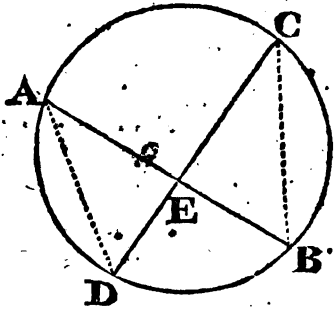
□ AEB ∞ □ GEH per ca-
Et □ CED ∞ eidem □ GEH ſum 3.

Ergo □ AEB ∞ □ CED.
Q. E. D.

NOTA.

In caſu 3. Illa quæ ſibi invicem ſubſcribuntur inter ſe ſunt æqualia & inferiora loco ſuperiorum legi debent, ac ſi in una eadem linea eſſent ſubſtituta; id quod etiam in pleriſque aliis demonſtrationibus obſervandum.

SCHOLIUM.



Suppoſitis Libri V. Definitione I. & prop. 4 & 16. (quæ cum hac propoſitione nihil habent commune) hæc unica demonſtratio facillime omnibus caſibus inſervire poteſt.

DEMONSTRATIO.

Ductis AD. CB, erit in triangulis AED. CEB.

Angulus A ∞ C
Ang. D ∞ B } 21. III.
Ang. AED ∞ CEB. 15. I.

Ergo erit per 4. VI.

AE — ED ∺ CED I EB.

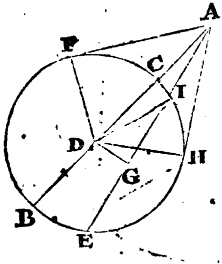
Et per noſtrum Theor. I. Lib. V. vel 16. VI.

□ AE. ED ∞ □ CE. ED. Q. D. E.

Pro-

PROPOSITIO XXXVI.

Theor. 30.



Si a puncto A extra circulnm dato ducantur duæ rectæ, una tangens AF, altera ſecans AB. Erit rectangulum BAC, ſub tota ſecante BA & illius parte AC inter punctum A & circulum interjecta comprehenſum, æquale quadrato tangentis AE.

Duo hic notandi ſunt caſus.

CASUS I.

Aut ſecans AB tranſit per centrum D.

DEMONSTRATIO.

Ducta DF, erit

□ BAC + □ DC a ∞ □ DA.
∞ □ DF + □ FA. 47. I.

S Atqui □ DC ∞ □ DF. Quia ſunt a radiis.

□ BAC ∞ □ FA.

CASUS II.

Aut ſecans AE non tranſit per centrum.

De-

DEMONSTRATIO.

Ex centro D ducta perpendiculari DG ut & DI : erit

□ EAI + □ GI ꝏ □ GA
□ DG □ DG } A.

□ EAI + □ DG + □ GI ꝏ □ DG + □ GA.
47. I. □ DI ſeu □ DF □ DA. 47. I.
Hoc eſt □ FD + □ FA. 47. I.

□ EAI + □ DF ꝏ □ DF + □ FA.
Sublato utrinque □ DF.

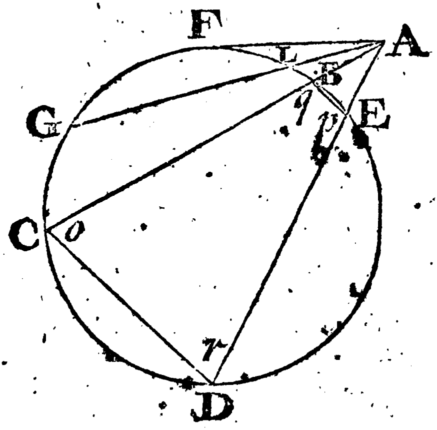
□ EAI ꝏ □ FA.

Q. E. D.

COROLLARIUM. I.

Si a puncto quovis extra circulum ſumpto, plures rectæ circulum ſecantes ducantur, rectangula comprehenſa ſub totis ſecantibus & partibus exterioribus, inter ſe ſunt æqualia.

SCHOLIUM I.



Suppoſitis iiſdem quæ in Scholio præcedenti, hanc damus Corollarii primi demonſtrationem.

Demonſtrandum eſt ⊏ CAB eſſe æquale ⊏ DAE.

DEMONSTRATIO.

Ductis CD & BE, erunt triangula CAD. EAB inter ſe ſimilia.

Nam anguli O + P ∞ 2 Rectis 22, III.

Et angnli AEB + P ∞ 2 Rectis 13, I.

Ergo O + P ∞ AEB + P,

Et Sublato communi angulo P,

O ∞ AEB.

Deinde ang. A utrinque eſt communis,

Ergo R ∞ ABE, 32, I.

Quare in triangulis CAD EAB erit per 4, VI.

CA — AD = EA | AB,

Et per 16, VI. ⊏

▭ CA AB ∞ ▭ DA·AE. Q. E. D.

SCHOLIUM II.

Si jam ex puncto A ſupra lineam AC ducatur ALG, eodemque modo ductis GD LE probatur eſſe ▭ GAL ∞ ▭ DAE; notandumque eſt puncta peripheriæ G.L. concavæ & convexæ propius ad ſe invicem accedere, quam puncta C. & B; quæ punctorum diſtantia adhuc magis imminuitur ſi ex A ſupra lineam AG ducatur alia Circulum ſecans: donec tandem ducatur recta AF, quæ Circulum tangit in unico puncto F, in quo puncta peripheriæ concavæ & convexæ coincidunt, adeoque cum antea deſignatæ eſſent duæ lineæ AB AC ſeu AL AG. inter ſe inæquales; jam ex A ducitur ſolummodo unica linea AF. quæ ergo in ſuperiori proportione bis ſumenda eſt ſc: ſemel pro linea GA, & ſemel pro LA. quo facto proportio ſic ſtabit FA — AD ∷ EA | AF.

Ergo per 16. VI.

□ Tangentis AF ∞ ▭ DA. AE.

Quæ æqualitas ipſius Propoſitionis 36 genuinum exhibet ſenſum; ut hinc pateat quam arcto nexu hæ veritates inter ſe cohæreant, quamque naturali una ex alia deducatur conſequentiâ.

COROLLARIUM II.

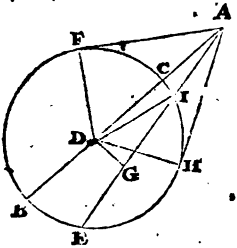
Duæ rectæ ab eodem puncto ductæ, quæ circulum tangunt, inter ſe ſunt æquales.

COROLLARIUM III.

Ab eodem puncto extra circulum ſumto, duci tantum poſſunt duæ rectæ, quæ circulum tangunt.

Pro-

PROPOSITIO XXXVII. Theor. 32.



Si a puncto A extra circulum poſito ducta ſint duæ rectæ AB. AF, ita ut rectangulum BAC ſit æquale quadrato alterius AF. tum linea AF circulum tanget in P.

DEMONSTRATIO.

Ducta linea tangente AH, ut & lineis DF. DH.

▭ BAC [a] ∞ □ AH. a 36. III.

Atqui ▭ BAC ∞ □ AF. per propoſit.

Ergo □ AH ∞ AF. Ergo AH ∞ AF.

Quare in Triangulis AFD. AHD.

Latus AF ∞ AH.

Latus FD ∞ HD.

Latus DA commune.

Ergo Ang. AFD ∞ AHD. [b] b 8. I.

Atqui [c] AHD eſt rectus. c 18. III.

Ergo ergo AFD rectus eſt adeoque [d] AF tangens. Q. E. D. d 16. III.

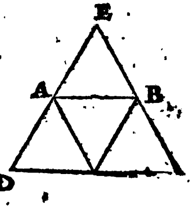
FINIS LIBRI TERTII.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER QUARTUS.

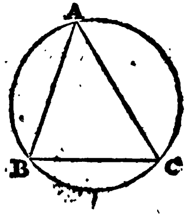
DEFINITIONES.

1. *Figura rectilinea, in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum ſinguli ejus figuræ, quæ inſcribitur, anguli, ſingula latera ejus cui inſcribitur tangunt.*



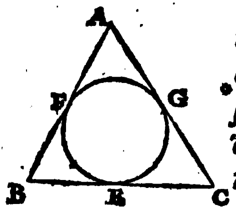
2. *Similiter & figura circum figuram deſcribi dicitur, cum ſingula ejus, quæ circumſcribitur, latera ſingulos ejus figuræ angulos tetigerint, circum quam illa deſcribitur.*

3. Fi-



3. *Figura autem rectilinea in circulo inſcribi dicitur, cum ſinguli ejus figuræ, quæ inſcribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.*

4. *Circulus autem circum figuram deſcribi dicitur, cum circuli peripheria, ſingulos tangit ejus figuræ, quam circumſcribit, angulos.*

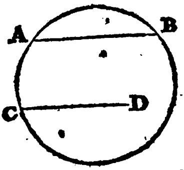


5. *Figura vero rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, cum ſingula latera ejus, quæ circumſcribitur, circuli peripheriam tangunt.*

6. *Si-*

6. *Similiter & circulus in figura inſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingula latera tangit ejus figuræ in qua inſcribitur.*

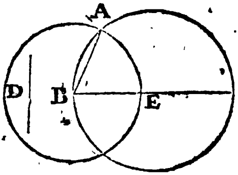
7. *Recta in circulo accommodari, ſeu coaptari dicitur, cum ejus extrema in circuli peripheria fuerint.*



Sic A B. dicitur in circulo accommodata nôn vero C D.

Pro-

PROPOSITIO I. Probl. 1.



In dato circulo ABC accommodare rectam BA æqualem datæ rectæ D: quæ Circuli diametro BC non ſit major.

CONSTRUCTIO.

1. In dato circulo duc Diametrum BC; cui ſi data recta D ſit æqualis, petito ſatisfactum erit. Si vero minor.

2. Abſcinde [a] BE ꝏ D: & centro B radio BE deſcribe arcum circuli EA. a 3. 1.

Dico rectam BA eſſe æqualem D & coaptatam in Circulo.

DEMONSTRATIO.

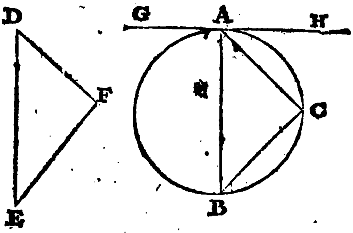
Linea D ꝏ BE per conſtructionem.
EA ꝏ BE quia radii.

Ergo linea D [b] ꝏ BA, quæ eſt coaptata in circulo quia [c] utraque extremitas terminatur in peripheria.

b Ax. 1. c Def. 7. IV.

Probl. 2. PROPOSITIO II.

In dato circulo ABC triangulum ABC deſcribere, quod dato triangulo DEF ſit æquiangulum.



CONSTRUCTIO.

a 17. III. 1. Ad [a] ductæ tangentis GH punctum A [b] conſtituatur angulus GAB. æqualis angulo F.
b 23. I.

2. Ad idem punctum A ab altera parte fiat HAC æqualis angulo E.

. Jungatur recta BC.

Dico

Dico triangulum ABC ipſi DEF eſſe æquiangulum.

DEMONSTRATIO.

In triangulis ACB. DEF.

A {Ang. C (c) ∞ | GAB ∞ F per conſtruct: \ Ang. B (c) ∞ | HAC ∞ E per conſtruct. c 32. III.

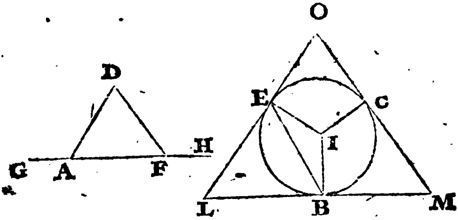
Duo anguli C + B ∞ duobus F + E.

Ergo etiam tertius [d] A ∞ tertio D. d 2 Cor. 32. I.

PROPOSITIO III.

Probl. 3.

Circa datum circulum BCE triangulum LMO deſcribere æquiangulum dato triangulo AFD.



CONSTRUCTIO.

1. Trianguli DAF latus AF producatur in G & H.

a 23. I. 2. In circulo ducto radio IB, a fiat angulus BIE. æqualis trianguli externo angulo DAG.

3. Fiat angulus BIC æqualis externo DFH.

b 16. & 17. III. 4. Ad tria puncta B. C. E. ducantur tres b tangentes OL. OE. LM.

Dico ex illarum concurſu oriri triangulum OLM. dato DAF æquiangulum.

DEMONSTRATIO.

Ex Scholio prop. 32. I. quadrilaterum BIEL dividi poteſt in duo triangula, cum au-

autem unum triangulum contineat duos angulos rectos, duo continebunt quatuor; adeoque quatuor anguli in quadrilatero dicto erunt æquales quatuor rectis: a quibus ſi demantur duo [c] recti LEI. LBI. remanebunt. c 16. III.

Anguli BIE + L ꝏ 2 Rectis.
Atqui DAG + DAF ꝏ 2 Rectis.

Ergo BIE + L ꝏ DAG + DAF } S
Atqui BIE ꝏ DAG per conſt. }

Remanet L ꝏ DAF.

Eodem modo demonſtratur quod ſit angulus M ꝏ DFA, ergo tertius O erit ꝏ [d] tertio D. d 2 Cor. 32. I.

N O T A.

Quod autem tangentes EL & BL in puncto L concurrere debeant ſic patet. Ducta BE.

Duo anguli toti LBI. LEI. ꝏ 2 R.
Ergo ang. partiales LEB. LBE > 2 R.

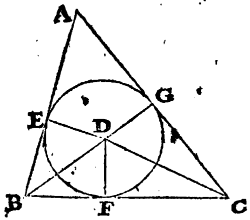
---

[e] Ergo rectæ EL. BL concurrent. e Ax. 11.

PROPOSITIO IV.

Probl. 4.

Dato triangulo ABC circulum inſcribere.



CONSTRUCTIO.

1. Duos quoslibet angulos B. C. [a] divide bifariam per rectas BD. CD.

a 9. 1.

2. Ex puncto concurſus D duc perpendiculares DE. DF. DG.

3. Centro D, radio DE. deſcribe circulum.

Dico illum tangere omnia latera trianguli in punctis D. E. F. adeoque ipſi inſcriptum eſſe.

De-

DEMONSTRATIO.

In triangulis DGC. DFC.
Ang. G ∞ F. per conſtr.
Ang. DCG ∞ DCF. quia totus C biſectus eſt.
Latus DC commune.

Ergo latus DG [b] ∞ DF. b 26. I.

Eodem modo demonſtratur eſſe DF ∞ DE.

Adeoque tres lineæ DE. DF. DG ſunt inter ſe æquales.

Ergo circulus centro D ductus tranſit per puncta E. F. G. & tangit [c] omnia latera; quia anguli ad E. F. G. ſunt recti; adeoque [d] triangulo inſcriptus eſt.

c 16. III.

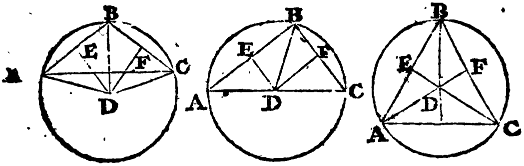
d Def. 6.

PRO-

Probl. 5.

PROPOSITIO V.

Circa datum triangulum ABC circulum deſcribere.



CONSTRUCTIO.

1. Quælibetcunque duo latera AB. BC [a] divide bifariam in E. & F.

a 10. 1.

2. Ex E & F erige [b] perpendiculares ED. FD.

b 11. 1.

3. Ex puncto concurſus, deſcribe radio DA circulum.

Dico illum quoque tranſire per puncta B, C. adeoque triangulo circumſcriptum eſſe.

DEMONSTRATIO.

Ductis DA DB DC. In triangulis DEA. DEB.

Latus DE commune.
Latus EA ∞ EB } Per con-
Angulus DEA ∞ DEB } ſtruct.

Ergo [c] baſis DA ∞ DB. c 4. I.

Eodem modo demonſtratur eſſe DB ∞ DC, adeoque tres lineæ DA, DB, DC ſunt inter ſe æquales.

Ergo Circulus centro D, radio DA deſcriptus, tranſit per omnia trianguli puncta angularia; adeoque ipſi eſt circumſcriptus. [d] d Def. 4. IV.

Eadem conſtructionis formula obtinet in omnibus trianguli ſpeciebus; cum hac ſolummodo differentia, quod in Rectangulo centrum cadat in punctum medium hypotenuſæ.

In Acutangulo centrum cadat intra triangulum.

In obtuſangulo vero extra.

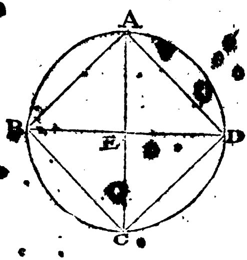
SCHOLIUM.

Ex hac propoſitione deducitur Methodus deſcribendi circulum, per tria puncta nôn in linea recta diſpoſita, tranſeuntem.

Probl. 6.

PROPOSITIO VI.

Dato Circulo quadratum inſcribere.



CONSTRUCTIO.

1. Ducantur duæ Diametri AC BD in centro C ſe ad angulos rectos interſecantes.

2. Jungantur rectæ AB. BC. CD. DA.

Dico ABCD eſſe quadratum quæſitum.

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus.

In triangulis AEB. AED.

Latus

Latus AE utrique commune.
Latus EB ∞ ED. quia radii.
Angulus AEB ∞ AED. quia uterque rectus.

Ergo baſis AB.[a] ∞ AD. a 4. I.

Eodem modo probatur AD ∞ DC : DC ∞ CB. CB ∞ BA.

Adeoque quatuor illa latera inter ſe erunt æqualia.

Pro angulis.

Quatuor anguli A.B. C.D. iſtis lateribus contenti ſunt in Semicirculo. ergo recti.[b] b 31. III.

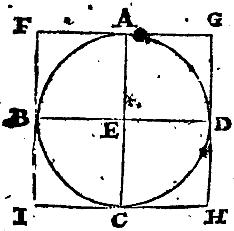
Adeoque ABCD eſt quadratum circulo inſcriptum.

Q. E. F.

PROPOSITIO VII.

Probl. 7.

Circa datum Circulum quadratum deſcribere.



CONSTRUCTIO.

1. Ducantur duæ diametri AC. *BD* ſe mutuo ad angulos rectos in E ſecantes.

2. Per illarum extremitates ducantur tangentes FG. GH. HI. IF.

Dico illas coeuntes conſtituere Quadratum quæſitum FGHI.

De-

DEMONSTRATIO.

Pro angulis.

In quadrilaterò AEBF.

4 Anguli A. E. B. F. ꝏ [a] 4 Rectis } S — a 32. I. & Scholium.
Atqui 3 Ang. A. E. B ꝏ 3 Rectis

Remanet ang. F ꝏ 1 Recto.

Simuli ratiocinio probatur angulos G. H. I eſſe rectos.

Pro lateribus.

In parallelogrammis F*D*. I*D*. latera FG. *I*H ſunt æqualia *D*iametro B*D*. adeoque & inter ſe.

*I*n parallelogrammis *I*A. HA. latera F*I*. GH ſunt [b] æqualia *D*iametro AC. — b 34. I.

Atqui *D*iametri AC. B*D* ſunt inter ſe æquales.

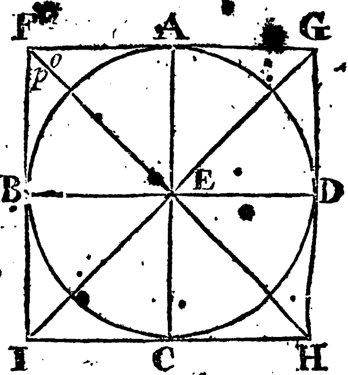
Ergo 4 latera FG. GH. H*I*. *IF* ſunt inter ſe æqualia.

Adeoque FGH*I* eſt quadratum quæſitum. Q. *F*. E.

PROPOSITIO VIII.

Probl. 8.

In dato quadrato Circulum deſcribere.



CONSTRUCTIO.

1. Ducantur duæ diagonales FH. GI ſe interſecantes in E.

2. Ex E demittatur ad latus FI perpendicularis EB.

3. Centro E radio EB, deſcribatur Circulus.

Dico illum tangere latera in punctis A, B. C. D. adeoque quadrato inſcriptum eſſe.

De-

DEMONSTRATIO.

Ex E ductis perpendiculatibus EA. ED. EC.

In triangulis FAE. FBE. ennt.

Angulus A ∞ B per conſtr. quia recti.
Angulus a O ∞ P. quia ſemirecti. a 2 Cor. 32. I.
Latus FE utrique commune.

Ergo Latus EA ∞ EB. [b] b 26. I.

Sic etiam probatur EB ∞ EC: & EC ∞ ED: ut & ED ∞ EA.

Ergo circulus centro E, radio EB deſcriptus tranſibit per puncta A. D. C: & quia anguli ad illa puncta ſunt recti, tanget omnia latera; adeoque circulus quadrato erit inſcriptus.

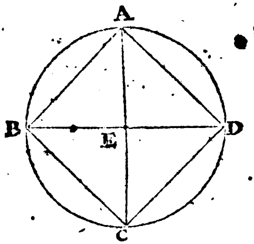
Q. E. D.

PRO-

Probl. 9.

PROPOSITIO IX.

Circa datum quadratum circulum deſcribere.



CONSTRUCTIO.

1. Ducantur diametri AC. BD ſecantes ſeſe in puncto E.
2. Centro E, radio EB, deſcribatur Circulus.

Dico illum tranſire per omnia quadrati puncta angularia; adeoque illi eſſe circumſcriptum.

De-

DEMONSTRATIO.

*D*iametri *AC*. *BD*, quatuor angulos A. B. C. *D*. [a] biſariam ſecant, Ergo in triangulo EBA. a 2 Coro. 32. I.

Angulus EBA ∞ EAB.

Ergo latus EA [b] ∞ EB. b 6. I.

Sic etiam probatur EB ∞ EC: & EC ∞ E*D*: & *ED* ∞ A.

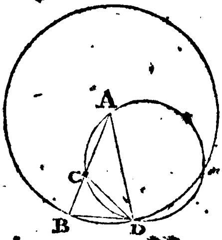
Adeoque quatuor lineæ EA. *EB*. *EC*. *ED*. ſunt inter ſe æquales.

Ergo circulus centro *E* radio *EB* deſcriptus tranſit per omnia quadrati puncta angularia A. B. C. *D*. adeoque illi circumſcriptus eſt.

Q. E. D.

PROPOSITIO X.

Probl. 10.



Triangulum Iſoſceles ABD conſtruere, cujus ſinguli ad baſin anguli B. & D dupli ſint reliqui ad verticem A.

CONSTRUCTIO.

1. Quamlibetcunque lineam AB ita

a 11. II. divide a in C, ut ▭ ABC ſit □ AC.

2. Centro A radio AB deſcribe circulum.

3. Ex B in iſto circulo accommoda

b 1. IV. b rectam BD ∞ AC.

4. Duc rectam AD.

Dico ABD eſſe triangulum quæſitum.

DEMONSTRATIO.

Ducta recta CD, circa triangulum ACD deſcribatur circulus ACD.

▭. ABC ∞ □ AC hoc eſt □ BD per conſtr.

---

c 37. III. Ergo BD tangit circulum c: quem BA, ſecat.

d 32. III. A { Vnde ang. BDC d ∞ A in alterno ſeg. Ang. CDA CDA.

A

Totalis ang. ADB (ꝏ ABD) ꝏ A + CDA.

Atqui etiam BCD [d] ꝏ A + CDA. [d] 32. I.

Ergo

In triangulo BCD ang. BCD ꝏ CBD.

Adeoque latus BD [e] ꝏ CD. [e] 6. I.

Atqui latus BD ꝏ AC.

Ergo

In triangulo ACD latus CD ꝏ CA.

Adeoque angulus A ꝏ CDA.

Ergo angulus BCD (qui duobus A & CDA eſt æqualis probatus) eſt duplus anguli A.

Ergo etiam BDC, qui angulo ABD demonſtratus eſt æqualis, duplus erit anguli A.

Adeoque & ADB, qui angulo [f] ABD eſt æqualis, ejuſdem anguli A duplus erit. Q. E. F.

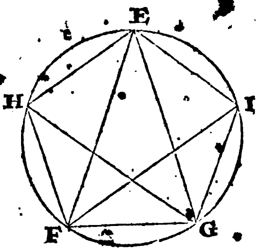
COROLLARIUM.

In triangulo Iſoſcele hoc modo conſtructo, angulus ad baſin valet duas partes quintas ſeu $\frac{2}{5}$ duorum vel $\frac{4}{5}$ unius Recti: quare angulus A valebit $\frac{1}{5}$ duorum vel $\frac{2}{5}$ unius Recti.

Theor. 11.

PROPOSITIO XI.

Dato circulo Pentagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere.



CONSTRUCTIO.

1. Cuilibetcunque triangulo Iſoſceli juxta præcedentem propoſitionem conſtituto, æquiangulum [a] inſcribatur EFG in circulo dato.

a 2 IV.

2. Illius ſupra baſin anguli EFG. EGF biſecentur per rectas FI. GH.

3. Puncta E. H. F. G. I. jungantur totidem rectis.

Dico factum eſſe quod petitur.

De-

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus.

Quinque anguli EFI. IFG, EGH. HGF. FEG ſunt inter ſe æquales per conſtructionem.

Ergo [a] arcus quibus inſiſtunt ſunt æquales. a 26. III.

Ergo illis [b] ſubtenſæ rectæ, quæ ſunt Pentagoni latera, ſunt æquales. b 29. III.

Pro angulis.

Arcus HFGI ∞ Arcui FGIE. per partem I.

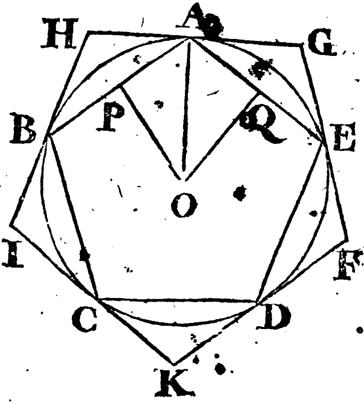
Ergo Angulus E [c] ∞ Angulo H. quia æqualibus arcubus inſiſtunt. c 27. III.

Simili modo de duobus aliis angulis &c. Q. E. F.

PROPOSITIO XII.

Theor. 12.

Circa datum circulum Pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.



CONSTRUCTIO.

1. Inſcribatur Pentagonum regulare per præced: ABCDE.

2. Ad puncta A. B. C. D. E. ducantur totidem tangentes, quæ concurrent in punctis F. G. H. I. C.

Dico factum quod quæritur.

De-

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus.

Ex centro O ductis perpendicularibus OP. OQ, ut & radio OA in triangulis OAP. OAQ.

Latus OP [a] ꝏ OQ. quia æquales AB. AE æquidiſtant a centro. a 14. III.

Latus PA [b] ꝏ QA. quia æquales AB. AC biſectæ ſunt. b 3. III.

Latus OA utrique communes.

Ergo ang. [c] OAP ꝏ OAQ. Qui ſi auferantur ab æqualibus Rectis angulis OAH OAG: remanebit angulus HAB ꝏ GAE. c 8. I.

Deinde Triangula BHA. EGA. ſunt Iſoſcelia, quia ex puncto H ductæ ſunt ductæ tangentes HA. AB: ut ex puncto G duæ GA. GE: quæ ſunt [d] æquales: d 2 Corol. 36. III.

Quare illa triangula habent baſes AB. AE æquales, & angulos ad baſin HBA. HAB. æquales GAE. GEA. non ſolum alterum alteri, ſed promiſcue omnes quatuor inter ſe æquales. Adeoque [e] quatuor latera BH. HA. AG. GE. ſunt inter ſe æqualia. e 5 & 16. I.

Si-

Simili modo demonſtcatur omnes decem lineolas eſſe inter ſe æquales.

Si jam una ſit æqualis uni etiam duæ erunt duabus æquales.

Adeoque quinque latera, quæ ex duabus lineolis conſtant, erunt æqualia.

Pro angulis.

Ex demonſtratis patet triangula AHB AGE habere omnia latera æqualia.
f 8. 1. Adeoque angulum H f X G. Et eodem modo de reliquis.

COROLLARIUM.

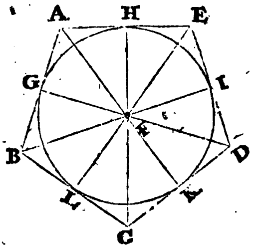
Si in circulo quælibetcunque figura regularis fuerit inſcripta; lineæ tangentes circulum in punctis illius angularibus, ſuo concurſu ſemper conſtituent figuram ſimilem circulo circumſcriptam.

Pro-

PROPOSITIO XIII.

Prob. 13.

Dato Pentagono regulari circulum inſcribere.



CONSTRUCTIO.

1. Quoslibet duos angulos A & E divide bifariam per rectas AF. EF.

2. Ex illarum puncto concurſus F, ducantur ad omnia latera perpendiculares.

3. Ex F tanquam centro pro radio aſſumta una ex iſtis perpendicularibus deſcribatur circulus.

Dico illum Pentagono fore inſciptum.

DEMONSTRATIO.

In Triangulis AGF. AHF.

Angulus GAF ꝏ HAF } Per con-
Angulus AGF ꝏ AHF } ſtruct.
Latus AF utrique commune.

---

a 26. I. Ergo a latus GF ꝏ HF.

Eodem modo probatur HF ꝏ IF. IF ꝏ KF. KF ꝏ LF & denique LF ꝏ GF.

Adeoque omnes iſtæ perpendiculares erunt inter ſe æquales.

Quare circulus radio FH deſcriptus tranſibit quoque per puncta I. K. L. G. b 16. III. in quibus iſta latera tanget; quia anguli ad iſta puncta ſunt recti.

Q. E. D.

COROLLARIUM. I.

In quolibet polygono regula-

ri

ti omnes lineæ biſecantes angulos in uno eodemque puncto conveniunt.

COROLLARIUM II.

In omni Polygono laterum imparem habente numerum linea aliquem ex angulis biſecans oppoſitum etiam biſecabit latus.

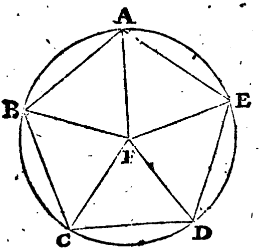
SCHOLIUM.

Eadem methodo in quacunque figura regulari circulus deſcribi poteſt.

Probl. 14.

PROPOSITIO XIV.

Circa datum Pentagonum regulare circulum deſcribere.



CONSTRUCTIO.

1. Duos quoſlibet angulos *A* & B divide bifariam per rectas *AF*. *BF*, quæ [a] concurrent in *F*.

a Ax. 11.

2. Centro *F*, radio *AF*, vel *BF* deſcribe circulum.

Dico illum tranſiturum per reliqua puncta angularia.

De-

DEMONSTRATIO.

In triangulo *FAB*.

Ang. *FAB* ∞ *FBA*. quia illorum dupli ſunt æquales.

Ergo latus *FA* ∞ *FB*.

Eodem modo biſecto angulo C demonſtrabitur *FB* ∞ *FC*. & ſic per orbem omnes lineæ biſecantes angulos erunt æquales.

Ergo circulus tranſibit per omnia puncta angularia, adeoque pentagono circumſcriptus erit.

Q. *F. E.*

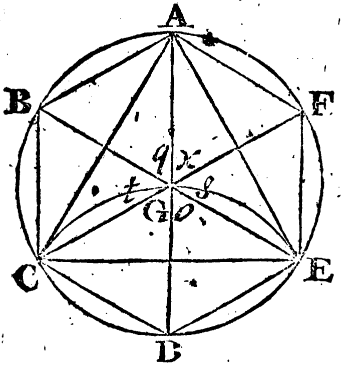
SCHOLIUM.

Eadem conſtructionis forma circa quamlibet figuram regularem circulum deſcribere licet.

Probl. 15.

PROPOSITIO XV.

In dato circulo Hexagonum regulare deſcribere.



CONSTRUCTIO.

1. Centro quolibet puncto D, radio circuli DG, deſcribe arcum CGE.

2. Ex punctis C. D. E. per centrum G deſcribe tres diametros CF. DA. EB.

3. Duc ſex rectas AB. BC. CD. DE. EF. FA.

Dico ABCDEF eſſe hexagonum quæſitum.

De-

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus.

Lineæ DC. DE ſingulæ ſunt æq.; Radio DG.

Lineæ GC. GE. GD ſinguli ſunt Radii.

Ergo quinque lineæ GC. GD. GE. DC. DE ſunt æquales.

Adeoque Triangula GCD. GDE ſunt æquilatera.

Ergo duo anguli G & O ſinguli ſunt a una tertia pars duorum rectorum. a 3 Cor. 32. I.

Atqui tres anguli G. O. S. ſimul b valent duos rectos, ſeu tres tertias duorum rectorum. b 13. I.

Ergo tertius S. etiam eſt una tertia duorum rectorum.

Adeoque tres G. O, S. ſunt inter ſe æquales.

Atqui illis æquales ſunt tres c oppoſiti X. Q. T. c 15. I.

Ergo ſex anguli ad Centrum ſunt æquales.

Ergo d ſex arcus, quibus inſiſtunt, ſunt æquales. d 26. III.

Adeo-

e 29. III. Adeoque [e] ſex ſubtenſæ, quæ conſtituunt latera figuræ, inter ſe ſunt æquales.

Pro angulis.

Hos eſſe æquales facile patet, quia
f 21. III. [f] ſinguli inſiſtunt æqualibus arcubus, ſc. quatuor ſextis partibus totius peripheriæ: Ergo ſunt inter ſe æquales.

COROLLARIUM.

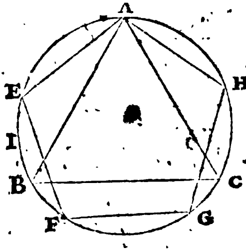
Hexagoni latus æquale eſt radio.

SCHOLIUM.

Ductis tribus rectis AC. AE. CE. circulo inſcriptum erit triangulum æquilaterum.

PRO-

PROPOSITIO XVI. Probl. 16.



In dato Circulo Quindecagonum regulare deſcribere.

CONSTRUCTIO.

1. Circulo (a) inſcribe pentagonum regulare AEFGH. a 11. IV.

2, Itidem (b) triangulum regulare ABC. b Schol. 15. IV.

Dico rectam BF, fore latus quindecagoni quæſiti.

DEMONSTRATIO.

Pentagonum dividit totam peripheriam in quinque partes æquales; quare quælibet continet unam quintam ſeu tres decimas quintas totius peripheriæ: adeoque duæ AE. EF, ſex decimas quintas continebunt.

Triangulum vero dividit totam peripheriam in tres partes æquales; quarum quælibet ut AB continet unam tertiam, ſeu quinque decimas quintas totius peripheriæ. Tum

Arcus AEF ſex decimæ quintæ.
Arcus AEB quinque decimæ quintæ. } S.

Arcus BF una decima quinta.

Ergo ſi ducatur recta BF, eique æquales quatuordecim in circulo coaptentur, deſcriptum erit quindecagonum, æquilaterum, cum omnes arcus ſint æquales.

FINIS LIBRI QUARTI.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

1. *Pars eſt magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum metitur majorem.*

CUm totum ſit ſua parte majus, patet partem contineri in ſuo toto. Hoc autem duplici modo fit.

Vel continetur ita ut aliquoties ſumta, præciſe reddat ſuum totum ſeu ipſi æqualis ſit; quemadmodum numerus quatuor ſeu 4, eſt minor toto 12, adeoque in illo continetur, & quidem ita, ut aliquot vicibus, ſcilicet tribus ſumtus, accurate æqualis ſit toti 12. Et inde hæc pars Mathematicis dicitur Aliquota, quæ ſuum totum abſque reſiduo dividit, id quod idem eſt ac metiri: & hanc Partis ſpeciem Euclides ſolummodo reſpexit, altera, quæ ſequitur, neglecta.

Vel pars ita continetur in ſuo toto, ut aliquoties ſumta totum vel excedat vel ab illo

illo deficiat, adeoque non accurate ipſi æqualis ſit. Quemadmodum numerus 4, cum minor ſit toto 14, in illo continebitur; ſed quia ter ſumtus toto minor eſt ac quater toto major, hæc pars non poteſt dici Aliquota, ut altera pars notata: quia tamen aliquam exhibet quantitatem totius quantitatis, vocatur pars Aliquanta.

Cæterum cum Euclides adhibuerit Magnitudinis vocabulum, ſuſpicari licet illum meminiſſe ſolum quantitatis continuæ, quæ vulgo magnitudinis nomine Mathematicis venit; minime tamen excludenda eſt quantitas diſcreta & in numeris poſita, quæ ſuas etiam habet partes: quibus illa omnia, quæ de rationibus & proportionibus toto hoc libro demonſtrat, æque facile imo pro captu noſtro facilius accommodari poſſunt.

Quare & nos cum multis aliis omnes hujus libri propoſitiones, neglectis lineis demonſtrabimus in numeris; tum quia illis magis ſumus aſſueti & de illis ſæpius quam de lineis cogitavimus; tum etiam quia illa quæ de numeris probantur, ſi cui libet, ipſis lineis applicari poſſunt.

2. *Multiplex autem eſt major quantitas quàm metitur minor.*

Quemadmodum pars ſuum totum dividit, ſeu metitur abſque reſiduo vel cum reſiduo; ita reciproce etiam totum a ſua parte dividitur vel ſine vel cum reſiduo. Prius illud totum idem eſt quod multiplex, cujus in hac definitione fit mentio, non intellecto altero, quod cum reſiduo divitur, quodque adeo multiplex dici non meretur.

3. *Ratio eſt duarum quantitatum ejuſdem generis, mutua quædam ſecundum communem menſuram habitudo.*

Cum propie loquendo una eademque res ad ſe ipſam non poſſit comparari ſecundum quantitatem, quia ſe ipſa non eſt major nec minor, patet plures requiri inter quas legitima inſtituatur comparatio; quæ etiam tantum poſſunt eſſe duæ. Illæ autem neceſſario requiritur ut ſint res homogeneæ; ut quantitates ejuſdem generis; quales ſunt linea cum linea com-

comparata; ſuperficies cum ſuperficie; corpus cum corpore: nullo ergo modo linea comparari poteſt cum ſuperficie vel cum corpore, nec ſuperficies cum corpore quia non ſunt ejuſdem generis.

Porro ulteriorem hujus homogeneitatis explicationem tradit Euclides in definitione 5.

Hæc autem intelligenda eſt in quantitatibus ſecundum magnitudinem, ſeu partium æqualium numerum, adeo ut una res altera ſit vel major vel minor; hoc eſt ut una res plures vel pauciores ſimiles ſeu æquales contineat partes quam altera.

Ex quibus patet rationem nihil aliud eſſe quam modum ſeu formulam continendi, qua una quantitas aliam quantitatem continet, vel in illa continetur; quæ capacitas cum per nullam aliam operationem quam per diviſionem innoteſcat, liquet rationem ſeu comparationem duarum quantitatum non clarius quam per fractionis formam poſſe exprimi.

Exempli gratia; ponantur duo numeri 16 & 4. qui ſaltem aliquam inter ſe habent rationem, quia numerus 16 major eſt numero 4, adeoque numerum 4 in

ſe continet. Ut jam ulterius iſta ratio examinetur videndum eſt quoties 16 continet 4, quod per diviſionem innoteſcit; quia autem facta diviſione acquiritur 4 pro quotiente pronuntiamus rationem 16 ad 4, eſſe quadruplam. hoc eſt 16 eſſe quadruplum numeri 4: vel 16 ſe habere ad 4 ut 4 ad 1: Id quod etiam commode hoc modo exprimitur per fractionem $\frac{16}{4}$ quæ innuit 16 per 4 eſſe dividendum vel jam ſupponit diviſum.

Si jam ſumantur duo alii numeri ex. gr. 8 & 2, & eorum rationem examinando comperiatur numerum 8 minorem 2 etiam quater in ſe continere, quia per diviſionem idem quotiens 4 obtinetur; quæ per modum fractionis expoſita ſic ſtabit $\frac{8}{2}$.

Inde patebit rationem quæ intercedit inter 16 & 4, eſſe eandem, vel ſimilem vel æqualem rationi quæ eſt inter 8 & 2: quia nimirum 16 toties continet 4, quoties 8 continet 2.

Porro hinc fit manifeſtum æquimultiplicem eſſe nihil aliud ſignificare quam habere eandem rationem: ut ſi dicatur 16 eſſe æquemultiplicem numeri 4, ac

8 eſt

8 eſt numeri 2, idem eſt ac ſi dicatur numerum 16 ad 4 habere eandem rationem, quam habet 8 ad numerum 2; cum utriuſque ſc. & æquemultiplicitas & ejuſdem rationis idem quotiens 4 per ejuſdem diviſionis acquiritur operationem: quare ejuſdem rationis notationem hoc modo exprimere licet $\frac{16}{4}$ ꝏ $\frac{8}{2}$.

Quæ fractiones, ut iterum in aliam rationum formam reducantur, dicimus 16 eſſe ad 4 quemadmodum 8 eſt ad 4; vel ſecundum noſtram qua utimur ſcriptionis methodum 16 — 4 ⊐ 8 | 2.

Duorum autem cujuslibet rationis terminorum ille qui ad alterum refertur Antecedens dicitur; ad quem vero fit relatio Conſequens rationis dicitur. Ut in ratione 16 ad 4 terminus Antecedens eſt numerus 16; conſequens vero 4: quemadmodum ab altera parte, in ratione 4 ad 16, numerus 4 Antecedentis, 16 vero conſequentis acquirit nomen.

Rationes autem non uno dividuntur modo: nos duas afferemus præcipuas.

I. Ratio dividitur in rationalem & irrationalem.

Rationalis eſt quæ veris numeris poteſt exprimi ut 6 ad 3: quæ eſt eadem

dem cum 2 ad 1. quæ dicitur dupla.

Irrationalis vero eſt quæ veris numeris exprimi nequit, ut in quadrato ratio lateris ad Diagonalem; quæ, licet aliquo modo exprimatur per numeros qui Surdi dicuntur, ſcilicet ut 1 ad $\sqrt{2}$, cum tamen $\sqrt{2}$ non ſit verus numerus, ſed tantum imaginarii cujuſdam numeri nota veris tamen numeris explicabilis non eſt.

II. Ratio dividitur in rationem æqualitatis vel inæqualitatis.

Ratio æqualitatis, eſt quando duo ad ſe comparata ſunt æqualia: ut 4 ad 4: & 2 ad 2.

Inæqualitatis eſt, cum termini inter ſe comparati inæquales ſint, ut 4 ad 3 & 2 ad 6.

Hæc autem iterum eſt.

Majoris inæqualitatis, cum terminus antecedens major eſt conſequente, ut 4 ad 3. & 6 ad 2.

Minoris inæqualitatis, cum antecedens eſt minor ſuo conſequente, ut 2 ad 6. & 4 ad 12.

Proportio eſt rationum ſimilitudo.

Quem-

Quemadmodum in omni ratione requiruntur duo termini ſeu duæ quantitates, ita in omni proportione requiruntur duæ rationes, cum una eademque ratio ad ſe ipſam proprie comparari nequeat.

Cum ergo duarum rationum una ita ſit conſtituta, ut illius terminus antecedens ſuum conſequentem toties contineat, vel in illo contineatur. ſive abſolute & ſine reſiduo ſive cum annexa fractione, quoties alterius antecedens ſuum conſequentem continet vel in illo continetur, vel ſine vel cum fractione quæ præcedenti æqualis eſt; duæ iſtæ rationes conſtituent Proportionem.

Ex: Gr: quia numerorum 12 & 4, Antecedens 12 ſuum conſequentem 4 toties (ſcilicet ter) continet quoties numerorum 9 & 3, antecedens 9 ſuum conſequentem 3., videlicet etiam ter, duæ iſtæ rationes 12 ad 4 & 9 ad 3 erunt inter ſe ſimiles ſeu æquales ſeu potius eædem ſcilicet triplæ; & hæc ſimilitudo apud Mathematicoa vocatur Proportio.

Eſt autem proportio triplex, Arithmetica, Geometrica, & Muſica.

I. Proportio Arithmetica eſt æqualitas exceſſuum vel differentiarum inter tres,

Tt qua-

quatuor vel plures numeros; in qua notandum eſt quemlibet numerum poſſe recipi pro differentia.

Ut 1. 2. 3. 4. 5. 6. In quibus unitas eſt differentia.

Vel 1. 3. 5. 7. 9. 11. Qui binario ſe invicem excedunt.

Vel 1. 4. 7. 10. 13. 16. Qui ternario. Et ſic in infinitum.

II. Proportio Geometrica eſt rationum ſimilitudo inter tres, quatuor vel plures quantitates, ſeu numeros. Poteſt autem & hic quilibet numerus pro denominatore rationis aſſumi excepta unitate.

Ut 1. 2. 4. 8. 16. Qui ſunt in ratione dupla adeoque 2 eſt rationis denominator.

Vel 1. 3. 9. 27. 81. Qui cum ſint in ratione tripla numerum 3 pro denominatore habent.

Proportio Muſica eſt qua tres quantitates ita ordinatæ ſunt, ut eadem ſit ratio primæ ad tertiam, quæ differentiæ inter primam & ſecundam ad differentiam inter ſecundam & tertiam. In qua proportione ſunt tres numeri 6. 8. 12. cum eadem ſit ratio primi numeri 6 ad

ter-

tium 12, quæ eſt numeri 2 (exceſſus primi) ad numerum 4. (exceſſum ſecundum.)

5. Rationem habere inter ſe quantitates dicuntur, quæ poſſunt multiplicàtæ ſe mutuo ſuperare.

Hic ulterius explicatur quænam ſint quantitates ejuſdem generis, inrer quas intercedit ratio, ut ſupra definit 3. vidimus; nim. quarum illa quæ antea erat minor, per multiplicationem ſic poteſt augeri, ut majorem ſuperet.

Unde patet inter illa, in quibus talis multiplicatio nullum habet locum, etiam nnllam omnino dari rationem. Sic linea in infinitum multiplicata & ſibi ipſi addita, nunquam fiet major aliqua ſuperficie: cum linea tali multiplicatione non degenerabit in ſuperficiem; adeoque inter lineam & ſuperficiem nulla intercedit ratio: quemadmodum etiam nulla reperitur inter lineam & corpus, nec inter ſuperficiem & corpus; cum qualibetcunque multiplicatione nec linea, nec ſuperficies relicta ſua ſpecie in corpus mu-

tabitur, adeoque nec ipſo majus evadere poſſit.

Cum autem inter latus quadrati ejuſque diagonalem multiplicatio obtineat, certo concludimus illa rationem inter ſe habere: latus enim ita multiplicari & ſibi ipſi addi poteſt ut diagonalem ſuperet; cum per 20. I pateat duo latera trianguli majora eſſe tertio latere quod eſt ipſa diagonalis: Hæc autem ratio, ut ſupra notavimus, eſt irrationalis, cum veris numeris illam exprimere non detur.

Præterea rectilinea & curvilinea inter ſe rationem habere poſſunt; cum inter illa ſit æqualitas & inæqualitas. Lunulæ creſcentis quadraturam Hippocrates Chius, & Parabolæ Archimedes invenerunt. Anguli rectilinei cum curvilineo, æqualitatem exhibuit Proclus.

6. *In eadem ratione quantitates dicuntur eſſe prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, cum prima ſuam ſecundam toties præſe vel cum tali fractione continet vel in illa continetur, quoties*

præ-

præciſe vel cum quali fractione tertia ſuam quartam continet vel in illa continetur.

Cum proportionalitatis indicium ab Euclide datum non ex ipſis propoſitis numeris ſed qualicunque eorum multiplicatione ſit deductum; nos illud nimis longe petitam aliquam proportionalium proprietatem ſuppeditare putamus; quare illo omiſſo aliud exhibemus indicium ex ipſis numeris propoſitis derivatum, & immediate ex rationis natura, antea explicata deductum.

Supra quippe vidimus rationem nihil aliud eſſe quam certam quandam formulam ſeu modum continendi, quo una quantitas aliam continet, vel ab alia continetur: quemadmodum poſitis duobus numeris 16 & 4. modus ille quo 16 numerum 4 continet poteſt exprimi per nomen quadrupli quia 16 ipſum 4 quatuor vicibus continet.

Si jam ex duobus aliis numeris 8 & 2, unus 8 alterum 2 etiam contineat eodem modo qui quadruplus dicitur, patet utrinque modum continendi eſſe æqualem vel potius eundem; cum autem

ut ſupra notatum eſt, ratio & modus continendi ſit unum & idem, facile concludimus, rationem etiam utrinque eſſe eandem: adeoque quatuor quantitates 16 & 4 ut & 8 & 2, binas ac binas ſumptas eſſe in eadem ratione.

Eodem modo cum numerus 20 numerum 8 non abſolute aliquot vicibus abſque fractione contineat, ſed modo continendi qui dicitur duplus cum dimidio; ſi ex numeris 10 & 4, primus 10 ſecundum 4 eodem modo duplo cum dimidio continet; utrimque modus continendi, ſeu quod jam pro eodem ſumimus, ratio erit eadem adeoque quatuor quantitates 20. 8 ut & 10. 4. binæ ac binæ acceptæ, in eadem erunt ratione.

7. *Eandem autem rationem habentes quantitates, vocantur proportionales.*

Quæ proportionales in duplici conſtituta ſunt genere.

Aut enim ſunt continue proportionales.

Aut non continue, quæ ſimpliciter tantum proportionales dicuntur.

Con-

Continuæ proportionales dicuntur illæ quantitates quæ ſunt in Progreſſione geometrica, inter quas a termino ad terminum eadem continuatur ratio, eundem terminum bis repetendo, ut ſemel primæ rationis ſit conſequens, antecedens vero ſecundæ.

Ex. gr. ex progreſſione gemetricá, cujus dominator eſt 2, ſcilicet 1. 2. 4. 8. 16. eligantur quatuor termini 1. 2. 4. 8. illi erunt continue proportionales; quia; eadem ratio ſcilicet dupla a termino ad terminum continuo procedit: primus enim 1 ſe habet ad ſecundum 2, ſicut idem ſecundus 2 ad tertium 4. deinde ſecundus 2 ſe habet ad tertium 4. quemadmodum idem tertius 4 ſe habet ad quartum 8.

Non continue proportionales dicuntur quantitates. quando eadem ratio quæ eſt inter primum & ſecundum non continuatur inter ſecundum & tertium, ſed ibi interrupta demum inter tertium & quartum invenitur, ut in hiſce numeris 12. 6. 8. 4. Ratio quæ eſt inter 12 & 6 non continuatur 6 & 8, ſed ibi interrupta tranſit ad duos reliquos terminos 8 & 4, cum 8 numerum 4 toties contineat quoties 12 continet 6. Hæ autem quan-

quantitates; ut ſupra notavimus, generali nomine dicuntur Proportionales.

8. *Cum vero prima quantitas ſecundam pluribus vel paucioribus vicibus contineat, quam tertia continet quartam, tunc prima ad ſecundam dicitur habere majorem vel minorem rationem quam tertia ad quartam.*

Ponantur quatuor numeri 8. 2. 6. 3. ex quibus primus 8 ſecundum numerum 2 pluribus vicibus (ſcilicet quatuor) contineat quam tertius 6 quartum 3. (qui illum bis continet), ratio quam 8 habet ad 2 erit major ratione 6 ad 3. Ex rationis enim natura ſupra vidimus rationem 8 ad 2 exprimi poſſe per fractionem $\frac{8}{2}$ (cujus valor eſt 4), ut & rationem 6 & 2, per fractionem $\frac{6}{3}$ (quæ tantum 2 valet) Cum autem fractio prima ſecunda major ſit, patet etiam immediate ex rationis natura primam rationem ſecunda eſſe majorem.

Deinde ex quatuor numeris 12. 6. 8 2. primus numerus 12 ſecundum 6 paucioribus

bus vicibus contineat (ſc. bis) quam tertius 8 quartum 2 (utpote quater): erit fractio $\frac{12}{6}$ minor fractione $\frac{8}{2}$ quippe prima valet tantum 2 ſecunda vero 4. Cum autem fractio & ratio unum idemque ſonent, etiam primam rationem ſecunda minorem eſſe patebit.

9. Proportio vero in tribus ad minimum terminus conſiſtit.

Quælibet ratio duos requirit terminos: unum antecedentem & unum conſequentem: Proportio vero duas ad minimum exigit rationes: adeoque quatuor poſtulat terminos: qui expreſſe etiam requiruntur ſi proportio non ſit continua: ſi vero proportio conſtituatur continua, tres termini ſufficiunt, & tum medium bis ſumendo idem eſt ac ſi quatuor eſſent poſiti. Quemadmodum in numeris 2. 4. 8. vel 16. 8. 4. vel aliis tribus quibuslibet, ratio primi ad ſecundum eſt prima; ratio vero ejuſdem ſecundi ad tertium eſt altera, quæ duæ unam conſtituunt proportionem.

10. *Cum tres quantitates proportionales fuerint, prima ad tertiam dicitur duplicatam habere rationem eam quam eadem prima habet ad ſecundam.*

At vero cum quatuor quantitates fuerint continue proportionales; prima ad quârtam dicitur triplicatam habere eam rationem, quam eadem prima habet ad ſecundam.

Et ſic porro uno amplius, quamdiu proportio exſtiterit.

Quidam putant rationem duplam & rationem duplicatam, unam & eandem rem ſignificare, quæ duo tamen accurate a ſe invicem ſunt diſtinguenda.

Ratio enim dupla intercedit inter duas quantitates ſeu numeros, quorum unus alterum præciſe bis continet: quemadmodum numeri 8 ad 4. vel 6 a 3. ſunt in ratione dupla: cujus correlarum ratio ſub dupla eſt in rationibus 4 ad 8 vel 3 a 6.

Duplicata vero ratio etiam invenitur

in

in numeris, ubi rationis duplæ ne minimum apparet veſtigium. Exemplo gratia in hiſce tribus numeris continue proportionalibus 3. 9. 27. ratio quam primus 3 ad tertium 27 eſt duplicata rationis quam idem numerus primus 3 habet ad ſecundum 9; licet nulla inter illos inveniatur dupla; unde patet rationem duplam & duplicatam ſignificare res toto cœlo diverſas.

Dicitur autem iſta ratio duplicata, quia ratio quæ eſt inter primum numerum & ſecundum, inter ſecundum & tertium adhuc ſemel quaſi repetitur. Notandum autem eſt hanc rationis repetitionem non aliter concipiendam eſſe quam per formam Multiplicationis; ita ut poſitis rationis terminus 3 ad 9, ad repetendam adhuc ſemel eandem rationem illius termini per ſe ipſos debere multiplicari, ſcilicet 3 per 3 & 9 per 9. ut obtineatur ratio terminorum 9 ad 81, quæ ratio erit duplicata rationis 3 ad 9.

Adeoque primus terminus 3 ſe habebit ad tertium 27 ut 9 ad 81. Illos quippe numeros eſſe proporalonales evidenter ex rationis & proportianalium natura antea tradita fit manifeſtum, cum nim. primus

3 in ſecundo 27 tot vicibus (ſcilicet novies) continetur, quot vicibus tertius 9 continetur in quarto 81.

Si jam porro ponantur quatuor continue proportionales 2. 4. 8. 16. ratio quæ eſt inter ptimum 2 & ſecundum 4, prima vice repetitur inter ſecundum 4 & tertium 8; & deinde ſecunda vice inter tertium 8 & quartum 16. Quæ repetitio cum per multiplicationem fiat, ut rationis 2 ad 4 inveniatur triplicata, termini 2 & 4 primo debent per ſe ipſos multiplicari; cujus multiplicationis productis 4 & 16 adhuc ſemel per eoſdem terminos 2 & 4 multiplicatis obtinebuntur termini 8 & 64, conſtituentes quæſitam rationem triplicatam. Terminos enim 2. 16. 8. 64. eſſe inter ſe proportionales ex natura rationis facile probari poteſt.

Cæterum ex his omnibus notandum venit, rationem duplicatam nihil aliud eſſe quam rationem quadratorum, quæ a propoſitæ rationis terminis fiunt. Rationem autem triplicatam alicujus rationis unam eandemque eſſe cum ratione cuborum, qui a terminis fiunt.

11. *Homologæ quantitates (in quatuor proportionalibus) dicuntur*

tur eſſe antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes vero conſequentibus.

Sint quatuor proportionales 2. 4. 3. 6. quantitas prima 2 & tertia 3 ſunt utriuſque rrtionis antecedentes, adeoque homologæ ſeu ejuſdem naturæ rem ſignificantes: duæ vero reliquæ ſc. ſecunda 4 & quarta 6, quia utriuſque rationes ſunt conſequentes, ſimiliter ſunt homologæ.

De modis argumentandi.

Cum Mathematici ex quatuor proportionalibus non unam tantum ſed plures eliciant concluſianes, quas modos ſeu formulas argumentandi vocant; Euclides illos ad ſex revocat, qui totidem ſequentibus proponuntur definitionibus, & in hoc libro 5 totidem fere propoſitionibus demonſtrantur.

12. *Alterna ratio eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſeqnentis ad conſequentem.*

Sint quatuor quantitates proportionales

12 — 6 ⩦ 8 | 4.

In quibus 12 & 8 ſint antecedentes; reliqui vero 6 & 4 conſequentes; alternando erit

12 — 8 ⩦ 6 | 4:

Hoc eſt Antecedens 12 eſt ad antecedentem 8, ſicut conſequens 6 ad conſequentem 4. Id quod demonſtratur prop. 16.

13. *Inverſa ratio eſt ſumptio conſequentis inſtar antecedentis ad antecedentem velut conſequentem.*

Si ponantur quatuor proportionales

12 — 6 ⩦ 8 | 4.

Ratione inverſa ſit erit.

6 — 12 ⩦ 4 | 8.

Seu ordine retrogrado priorem proportionem legendo

4 — 8 ⩦ 6 | 12.

14. *Compoſitio rationis eſt ſumptis antecedentis cum conſequente*

quente velut unius ad ipſum, conſequentem.

Sint iterum quatuor proportionales
12 — 6 = 8 | 4.

Per compoſitionem rationis dicimus.

$\frac{12 + 6}{\text{ſeu } 18} - 6 = \frac{8 + 4}{\text{ſeu } 12} \mid 4.$

Hoc eſt prima quantitas una cum ſecunda ſeſe habet ad ipſam ſecundam ſicut tertia cum quarta ad ipſam quartam. Hujus demonſtrationem vide prop. 18.

15. *Diviſio rationis eſt ſumtio exceſſus, quo antecedens ſuperat conſequentem, ad ipſum conſequentem.*

Sint quatuor proportionales,
18 — 6 = 12 | 4.

Per diviſionem rationis proportio ſic ſtabit.

$\frac{18 \div 6}{\text{ſeu } 12} - 6 = \frac{12 \div 4}{\text{ſeu } 8} \mid 4.$

Hoc eſt primus terminus minus ſeu dempto ſecundo ſe habet ad ipſum ſecun-

cundum, quemadmodum tertius minus ſeu dempto quarto ad ipſum quartum. Hic argumentandi modus demonſtratur prop. 17.

15. *Converſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo antecedens ſuperat ipſum conſequens.*

Propoſiti ſint quatuor proportionales.

18 — 6 ∺ 12 l 4.

Per converſionem rationis hanc habemus proportionem.

$$18 — \frac{18 \div 6}{\text{ſeu } 12} ∺ 12 \text{ l } \frac{12 \div 4.}{\text{ſeu } 8}$$

Hoc eſt primus ſe habet ad ipſum primum minus ſeu dempto ſecundo, quemadmodum tertius ſe habet ad ipſum tertium minus ſeu dempto quarto. Hæc demonſtratur in Coroll. prop. 17.

17. *Ex æqualitate ratio eſt, ſi plures duabus ſint quantitates, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ ſumantur in eadem ratio-*

tio-

tione; cum ut in primis quantitatibus prima ad ultimam, ſic & in ſecundis prima ad ultimam ſe habeat.

Sint tres quantitates. 12. 6. 4.
Et adhuc tres aliæ. 6. 3. 2.

Per rationem quæ eſt ex æqualitate concludimus

12 — 4 = 6 | 3.

Hoc eſt prima ſuperiorum ſe habet ad ſuam ultimam, quemadmodum prima inferiorum ad ſuam tertiam.

Quia autem hæc concluſio duobus modis ex iſtis ſex quantitetibus elicitur, duplex etiam ſe aperit ex æqualitate ratio; ſc. Ordinata & Perturbata.

18. *Ordinata proportio eſt, cum fuerit (poſitis ſcilicet ſex quantitatibus) ut prima ſuperiorum ad ſuam ſecundam, ita prima inferiorum ad ſuam ſecundam; deinde ut ſecunda ſuperiorum ad ſuam ultimam, ita ſecunda inferiorum ad ſuam ultimam: & con-*

cluditur quod prima ſuperiorum ſe habeat ad ſuam ultimam, quemadmodum prima inferiorum ad ſuam ultimam.

Sint tres quantitates 12. 6. 4.
Et tres aliæ 6. 3. 2.

In quibus 12 — 6 = 6 | 3.
Deinde 6 — 4 = 3 | 2.

Proportio ex æquo ordinata ſic ſtabit.
12 — 4 = 6 | 2.

Hujus modi demonſtrationem vide prop. 22.

Cæterum hæc proportio dicitur Ordinata, quia & in ſuperioribus & in inferioribut eundem ſervat ordinem.

19. *Perturbata autem proportio eſt, cum poſitis tribus quantitatibus & aliis tribus; ut in ſuperioribus prima ſe habeat ad ſuam ſecundam, ſic in inferioribus ſecunda ad ſuam ultimam: & in ſuperioribus ſecunda ad ſuam ultimam, ita in inferioribus prima ad ſuam ſecundam: & concluditur*

tur : quod prima ſuperiorum ſe ita habeat ad ſuam ultimam, quemadmodum prima inferiorum ad ſuam ultimam.

Sint tres quantitates 12. 6. 3.
Et aliæ totidem 16. 8. 4.

In quibus 12 — 6 ∺ 8 | 4.
Et 6 — 3 ∺ 16. | 8.

Proportio ex æquo perturbata ſic erit
12 — 3 ∺ 16 | 4.

Hujus demonſtrationem vide pro. 23.

Perturbata dicitur hæc proportio, quod in ſuperioribus & inferioribus non idem ſervetur ordo, ſed ille quaſi perturbetur.

LEMMA I.

Multiplicatio nihil eſt aliud quam multiplex additio: ſicut etiam diviſio nihil aliud quam multiplex & compendioſa ſubtractio.

DEMONSTRATIO.

Pars I. Sit numerus 6 multiplicandus

 per

per numerum 4, nihil aliud imperatum eſt quam, ut numerus 6 toties ſumatur, ſeu repetatur ſeu ſibi ipſi addatur, quoties unitas continetur in 4, ſc. quater: adeoque idem facimus ſive numerum 6 multiplicemus per 4, ſive eundem quater ponam & illos quatuor numeros 4 in unam ſummam colligam, cum utrobique obtineatur 24.

Pars 2. Si numerus 24 proponantur dividendus per numerum 4, idem eſt ac ſi examinandum eſſet, quoties numerus 4 a 24 poſſit ſubtrahi id quod in diviſione unica ſubductione fit diviſore prius per quotientem multiplicato cum ſubtractiones tot fieri poſſint, quot unitates diviſionis contineat quotiens. Quare nulla eſt differentia ſive 24 dividatur per 4 ſive 4 a 24 ſubtrahatur quoties fieri poteſt cum utrobique idem obtineatur quotiens 6.

Notandum autem in multiplicatione non ſemper opus eſſe ut multiplicatio revera fiat, & numeri inter ſe commiſceantur, ut productum unico numero exprimatur; cum eadem multiplicatio alia etiam forma deſignari poſſit, nimirum multiplicatores juxta ſe invicem ſcriben-

do

do interpoſito ſigno ·x·

Ex. gr: ſit 8 multiplicandus per 4 facta multiplicatione obtinetur productum 32, quod etiam hoc modo exprimi poteſt 8 ·x· 4. quod in pronuntiatione valet 8 multiplicata per 4.

Quæ exprimendi forma hoc habet commodum quod jam pateat ad oculum per quam operationem & ex quibus numeris illud productum ſit ortum, quod in altero producto 32 non tam clare diſtingui poteſt. cum illud etiam ex multis aliis additionibus & multiplicationibus generari potuiſſet.

Præterea ſi productam 8 ·x· 4 dividendum ſit per 4, omiſſo numero 4 ſcribendum erit 8. vel ſcribendum eſt 4, ſi dividi debeat per 8.

Similiter in diviſione non opus eſt ut ſemper vera fiat diviſio; cum quotiens quæſitus etiam alia forma poſſit exprimi, ſi nim. numero dividendo ſubſcribatur diviſor inter utrumque ducta lineola.

Ex. gr. oporteat dividere numerum 32 per 8, facta reali diviſione obtinetur quotiens 4, qui etiam deſignari poſſet per formamam fractionis $\frac{32}{4}$, qui quo-

 tiens

tiens in elocutione idem valet 32 partes quartæ, ſeu 32 diviſa per 4.

LEMMA II.

Si duo æquales numeri per eundem numerum multiplicentur, producta erunt inter ſe æqualia. Si uero per eundem numerum dividantur, quotientes erunt æquales.

DEMONSTRATIO.

1 Pars. Per Lemna 1 multiplicatio eſt multiplex & compendioſa additio: adeoque unus numerus multiplicandus toties ſibi additur, quoties alter (qui priori ponitur æqualis) ſibi ipſi additur: quia multiplicator utrimque ponitur idem: unde patet idem fieri ac ſi æqualibus æqualia addantur; quando nimirum ſummæ (quæ producto æquivalent) inter ſe ſunt [a] æquales:

a Ax. 2.

2. Pars. Per idem Lemma 1 diviſio eſt multiplex ac compendioſa ſubtractio: ergo ab uno numero dividendo toties ſubtrahitur diviſor quoties ab altero dividendo (qui per hypotheſin priori æqualis

eſt)

eſt) ſubtrahitur idem diviſor : quare in iſta diviſione utrinque idem fit, ac ſi ab æqualibus æqualia demantur; quare reſidua (quæ quotientibus æquivalent) inter ſe ſunt æqualia. b Ax. 3.

LEMMA III.

Si duo inæquales numeri per eundem numerum multiplicentur producta erunt inter ſe inæqualia. Si vero per eundem diviſorem dividantur, quotientes erunt inæ-les.

DEMONSTRATIO.

1 Pars. Cum per Lemma 1 multiplicatio ſit compendioſa Additio: ſi duo numeri inæquales per eundem numerum multiplicentur, idem eſt ac numerus major toties ſibi addatur quoties minor minori. At vero ſi inæqualibus æqualia adjiciantur, [a] tota ſunt inæqualia per Ax. 4. Ergo etiam, ſi numero majori major toties adjiciatur quoties minori additur minori, prior ſumma, quæ hic producto æquivalet, erit major altera. a Ax. 4.

2. Pars

2 Pars. Quia diviſio nihil aliud eſt quam compendioſa ſubtractio, ſi duo numeri inæquales per eundem numerum dividantur, nihil aliud fit quam quod idem numerus ab una parte a majori ſubtrahitur, ab altera vero a minori.

Patet autem eundem numerum pluries ſubtrahi a majori poſſe quam a minori; cum major eundem numerum pluries contineat quam minor: & cum plures iſtæ ſubtractionis vices conſtituant majorem quotientem, ſequitur ex diviſione majoris numeri per alium quemlibet acquiri majorem quotientem, quam ex minoris numeri per eundem diviſione.

LEMMA IV.

Si idem numerus vel duo numeri æquales per numeros inæquales multiplicentur, producta erunt inæqualia, & quidem productum majoris multiplicatoris erit majus producto minoris multiplicatoris.

Ut & ſi dividantur per numeros inæquales, quotientes erunt inæquales. Major quidem ille ubi di-

diviſor eſt minor; at vero minor, ubi diviſor eſt major.

DEMONSTRATIO.

Hæc ex ſuperioribus nullo negotio deduci poteſt.

Quatuor hiſce Lemmatibus præmiſſis, & qualicunque Arithmeticarum in fractionibus operationum notitia præſuppoſita, quædam ſubjungimus Theoremata, quæ tanquam generale omnium fere totius libri quinti propoſitionum demonſtrandarum fundamentum præſtruimus.

THEOREMA I.

Si quatuor quantitates ſint proportionales, productum quod oritur ex multiplicatione extremarum eſt æquale producto multiplicationis mediarum.

DEMONSTRATIO.

Sint quatuor proportionales.

8 — 4 = 6 | 3.

Ratio 8 ad 4 eadem eſt cum fractione

$\frac{8}{4}$ & ratio 6 ad 3 exprimitur per fractionem $\frac{6}{3}$: quia autem rationes ſunt eadem ſeu æquales; erunt quoque fractiones inter ſe inter ſe æquales.

Adeoque $\frac{8}{4}$ ꝏ $\frac{6}{3}$.

——————— utrinque multipl. per 4.

8 ꝏ $\frac{4 \cdot x \cdot 6.}{3.}$ Per Lemma 2.

Et ——————— utrimque multipl. per 3.

8 . x . 3 ꝏ 4 . x . 6 per Lem. 2.

Hoc eſt productum extremorum 8 & 3 per ſe invicem multiplicatorum eſt æquale producto mediorum etiam multiplicatorum. Q. E. D.

THEOREMA II.

Si duo producta ſint inter ſe æqualia, unus multiplicator primi producti ſe habet ad unum multiplicatorem ſecundi producti, quemadmodum reciproce alter multiplicator ejuſdem ſecundi producti ſe habet ad alterum multiplicatorem primi producti.

De-

DEMONSTRATIO.

Sint duo producta inter ſe æqualia.

$8 \times 3 \propto 4 \times 6.$ per Lemma 2.

utrimqne divid. per 3.

$8 \propto \frac{4 \times 6}{3}$. per Lemma 2.

utrinque divid, per 4.

$\frac{8}{4} \propto \frac{6}{3}$ per Lemma 2.

Quæ fractiones ſi revocentur ad rationes. erit

8 — 4 ∺ 6 l 3.

Quod juxta tenorem Theorematis E. D.

COROLLARIUM I.

Eodem modo poſſet demonſtrari eſſe.

8 — 6 ∺ 4 l 3.
Vel 3 — 4 ∺ 6 l 8.
Vel 3 — 6 ∺ 4 l 3.

Quæ proportiones involvunt tum Alternationem, tum inverſam etiam rationem.

COROLLARIUM II.

Hinc evidenter patet, ſi quælibetcunque quatuor quantitates eo ordine ſint poſitæ, & productum exrremarum producto mediarum fuerit æquale, certiſſime inde concludi poſſe, iſtas quatuor quantitates eo ordine proportionales eſſe.

SCHOLIUM.

Si quilibet datus numerus ex. gr. 24. reſolvatur in duos, per quorum multiplicationem potuerit generari (quod hic quater poteſt fieri vel per 1 in 24. vel per 2 in 12. vel per 3 in 8. vel per 4 in 6.) facile probatur eſſe.

	1	—	2	=	12	24.
Vel	2	—	3	=	8	12.
Vel	3	—	4	=	6	8.
Vel	1	—	3	=	8	24.
Vel	1	—	4	=	6	24.
Vel	2	—	4	=	6	12.

Et ſic de quolibet alio numero dato.

Theore-

THEOREMA III.

Si ex quatuor quantitatibus prima ad ſecundam majorem habeat rationem, quam tertia ad quartam: productum quod fit per multiplicationem extremarum majus erit producto mediarum.

DEMONSTRATIO.

Sit in quatuor hiſce quantitatibus

8 — 3 < 4 | 2.

Erit ſecundum ante dicta.

$$\frac{8}{3} < \frac{4}{2}.$$

———————— utrimque multipl: per 3.

$$8 < \frac{3 \cdot x \cdot 4}{2} \text{ per Lemma 3.}$$

———————— utrinque multipl. per 2.

8 .x. 2 < 3 .x. 4. per Lemna 3.

Hoc eſt productum extremorum 8 & 2 majus producto mediorum 3 & 4.

Q. E. D.

THEOREMA IV.

Si duo producta ſint inæqualia, prima quantitas multiplicans majoris producti ad primam quantitatem multiplicantem minoris producti majorem habebit rationem, quam reciproce ſecunda quantitas ejuſdem minoris producti ad ſecundam quantitatem majoris producti.

DEMONSTRATIO.

Sit ex propoſitis hiſce productis

$$8 \cdot x \cdot 2 < 3 \cdot x \cdot 4.$$

———————— utrinque divid. per 2.

$$8 < \frac{3 \cdot x \cdot 4}{2.} \quad \text{per Lemma 3.}$$

———————— utrimque div. per 3.

$$\frac{8}{3} < \frac{4}{2}$$

Hoc eſt redigendo haſce fractiones ad rationes

$8 — 3 < 4 | 2.$ Q. E. D.

Co-

COROLLARIUM I.

Eadem methodo facile poſſet demonſtrari eſſe

8 ——— 4 < 3 | 2.
Vel 2 ——— 3 < 4 | 8.
Vel 2 ——— 4 < 3 | 2.

COROLLARIUM II.

Hinc ſequitur, ſi quælibetcunque quatuor quantitates ordine ſint poſitæ, & productum extremarum producto mediarum ſit majus, firmiter concludendum eſſe, primam ad ſecundam habere majorem rationem, quam tertia habet ad quartam.

SCHOLIUM.

Si duo quilibet numeri inæquales 24 & 16 reſolvantur in ſuos multiplicationes

ſc: 24	& 16.
in	in
1. 24.	1. 16.
2. 12.	2. 8.
3. 8.	4. 4.
4. 6.	

ex hoc Theoremate patet eſſe

Vel 1 ——— 1 < 16 l 24.
Vel 1 ——— 2 < 8 l 24.
Vel 1 ——— 4 < 4 l 24.

Deinde

Vel 2 —— 1 < 16 l 12.
Vel 2 —— 2 < 8 l 12.
Vel 2 —— 4 < 4 l 12.

Poſtea.

Vel 3 —— 1 < 16 l 8.
Vel 3 —— 2 < 8 l 8.
Vel 3 —— 4 < 4 l 8.

Denique

Vel 4 —— 1 < 16 l 6.
Vel 4 —— 2 < 8 l 6.
Vel 4 —— 4 < 4 l 8.

Præter alias 36 majoritatis proportiones, quæ ex hiſce numeris elici poſſunt.

Theo-

THEOREMA 5.

Si ex quatuor quantitatibus prima ad ſecundam minorem habeat rationem, quam tertia ad quartam; productum quod fit per multiplicationem extremarum minus erit producto mediarum.

DEMONSTRATIO.

Sit in quatuor hiſce quantitatibus

4 — 2 > 8 | 3.

Erit $\frac{4}{2} > \frac{8}{3}$

——— utrinque multipl. per 3.

$\frac{4 \cdot x \cdot 3}{2} > 8$. Per Lemma 3.

——— utrinque multipl. per 2.

4 · x · 3 > 8 · x · 2. per Lemma 3.

Hoc eſt productum extremarum 4 & 3 eſt minus producto mediarum 2. 8:

THEOREMA 6.

Si duo producta ſint inæqualia, prima quantitas multiplicans minoris producti ad primam quantitatem multiplicantem majoris producti minorem habebit rationem, quam reciproce ſecunda quantitas ejuſdem majoris producti ad ſecundam quantitatem minoris producti.

DEMONSTRATIO.

Sit ex duobus hiſce productis.

$$4 \cdot x \cdot 3 > 8 \cdot x \cdot 2.$$

——————— utrinque divid. per 2.

$$\frac{4 \cdot x \cdot 3}{2} > 8. \text{ Per Lemma 3.}$$

——————— utrinque div. per per 3.

$$\frac{4}{2} > \frac{8}{3} \text{ per Lemma 3.}$$

Hoc eſt redigendo ad rationes

$$4 - 2 > 8 \,\Gamma\, 3.$$

Co-

COROLLARIUM I.

Eadem methodo facile poſſet demonſtrari. quod ſit

4 — 8 > 2 1 3.
Vel 3 — 8 > 2 1 4.
Vel 3 — 2 > 8 1 4.

COROLLARIUM. II.

Hinc patet, ſi quælibetcunque quatuor quantitates ordine ſint poſitæ, & productum extremarum ſit minus producto mediarum, certiſſime concludi, primam ad ſecundam habere minorem rationem, quam tertia ad quartam.

SCHOLIUM.

Si duo quilibet numeri inæquales 16 & 24 reſolvantur in ſuos multiplicatores:

ſc: 16.	24.
in	
1. 16.	1. 24.
2. 8.	2. 12.
4. 4.	3. 8.
	4. 6.

Ex hoc Theoremate patet eſſe

	1 —	1	>	24 l	16.
Vel	1 —	2	>	12 l	16.
Vel	1 —	3	>	8 l	16.
Vel	1 —	4	>	6 l	16.

Præterea.

Vel	2 —	1	>	24 l	8.
Vel	2 —	2	>	12 l	8.
Vel	2 —	3	>	8 l	8.
Vel	2 —	4	>	6 l	8.

Denique

Vel	4 —	1	>	24 l	4.
Vel	4 —	2	>	12 l	4.
Vel	4 —	3	>	8 l	4.
Vel	4 —	4	>	6 l	4.

Præter alias 36 minoritatis proportiones, quæ ex hiſce numeris deduci poſſunt.

Jam ſequuntur ipſæ Libri quinti Propoſitiones.

PRO-

PROPOSITIO I.

Si ſunt quotcunque magnitudines ſeu quantitates proportionales A.B.C.D.E.F. quemadmodum ſe habuerit una antecedentium ad ſuam conſequentem, ita omnes antecedentes G ſimul ſe habebunt ad omnes conſequentes etiam ſimul ſumptas H.

DEMONSTRATIO.

Sint in eadem inter ſe ratione

A 3 — 1 B
C 6 — 2 D } A
E 9 — 3 F

G 18 — 6 H.

Demonſtrandum eſt eſſe ſummam ad ſummam ut quælibet antecedens ad ſuam conſequentem.

Hoc eſt 18 — 6 = 3 | 1.
Deinde 18 — 6 = 6 | 2.
Denique 18 — 6 = 9 | 3.

Quia in qualibet proportione productum extremorum facta multiplicatione eſt æquale producto mediorum, quatuor illarum termini ſunt [a] proportionales.

[a] 2 Carol. Theor. 2.

PROPOSITIO II. & XXIV.

Si prima A ad ſecundam B eandem habuerit rationem, quam tertia C ad quartam D; habuerit autem & quinta E ad ſecundam B eandem rationem quam ſexta F ad quartam D; Etiam G, compoſita prima cum quinta ad ſecundam B, eandem habebit rationem quam H tertia cum ſexta ad quartam D.

DEMONSTRATIO.

	A		B		C		D	
Sit	4	—	2	=	6	1	3.	A.
	E 10				F 15.			
	G 14				H 21			

Si inſtituatur multiplicatio, producta erunt æqualia, ergu (a) iſtæ quantitates ſunt proportionales.

a Theor. 2.

Aliter

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4}{2} \infty \frac{6}{3} \\ \frac{10}{2} \infty \frac{15}{3} \end{array}\right\} A.$$

b Ax. 2.

$\frac{14}{2}$ b $\infty \frac{21}{3}$ vel in proportione.

14 — 2 = 21. 1 3. Q. E. D.

Pro-

PROPOSITIO III.

Si quatuor quantitates A. B. C. D. ſint proportionales; & prima A & tertia C per eundem quemlibet numerum G multiplicentur: productum primum E ſe habebit ad ſecundam B, quemadmodum productum ſecundum F ad quartam D.

DEMONSTRATIO.

A		B		C		D	
4	—	2	=	6	l	3.	M.
G 2				G 2			
E 8				F 12			

Demonſtrandum eſt

E		B		F		D
8	—	2	=	12	l	3.

Id quod (a) exinde patet, quod producta extremorum & mediorum ſunt æqualia. a Theor. 2.

Aliter

$\frac{4}{2} \infty \frac{6}{3}$

utrimque multipl. per 2.

$\frac{8}{2} \infty \frac{12}{3}$ Lemma 2.

Hoc eſt in proportione

8 — 2 = 12 l 3.

Pro-

PROPOSITIO. IV.

Si quatuor qnantitates A. B. C. D. ſint proportionales; prima vero A & tertia C. per quemlibet eundem numerum G multiplicentur; ut & ſecunda B & tertia D per alium numerum K. quatuor iſta producta inter ſe proportionalia erunt.

DEMONSTRATIO.

Sint quatuor proportionales

A B C D
4 — 2 = 6 | 3. } M
G 2 K 3 G 2 K 3
E 8 L 6 F 12 M. 9

Demonſtrandum eſt quatuor producta E. L. F. M. eſſe proportionalia ſeu
8 — 6 = 12 | 9.

Quod ex Theor. 2 ſequitur, quia facta multiplicatione producta extremorum & mediorum inter ſe ſunt æqualia.

Aliter

$\frac{4}{2}$ ∞ $\frac{6}{3}$

———————— multipl. per 2.

$\frac{8}{2}$ ∞ $\frac{12}{3}$ Lemma 2.

———————— divide per 3.

$\frac{8}{6}$ ∞ $\frac{12}{9}$ per idem Lemma 2.

Hoc eſt in proportione
8 — 6 = 12 | 9.

Pro-

PROPOSITIO V. XIX.

Si totum A ad totum B eandem habuerit rationem, quam ablata pars C ad partem ablatam D: etiam pars reliqua E ad partem reliquam F, eandem habebit rationem, quam totum A ad totum B.

DEMONSTRATIO.

A 8 4 B | S
C 6 3 D | S

Erit E F A B.
2 — 1 = 8 | 4.

Quia producta ſunt æqualia. per Theor. 2.

PROPOSITIO VI.

Si prima A ad ſecundam B eandem habuerit rationem, quam tertia C ad quartam D, habuerit autem & quinta E ad ſecundam B eandem rationem quam ſexta F ad quartam D. Si quinta E ſubtrahatur a prima A, & ſexta F ac tertia C,

Vel reſiduum primum G erit æquale ſecundæ B & reſiduum ſecundum H æquale quartæ D.

Vel reſiduum primum G ſe habebit ad ſecundam B ſicut reſiduum ſecundum H ad quartam D.

DEMONSTRATIO.

CASUS I.

A		B		C		D
12	—	2	=	18	1	3.
E 10				F 15.		
G 2				H 3.		

CA-

CASUS II.

A B C D
12 — 2 = 18 | 3. } S
E 4 . F 6

Erit G B H D.
8 — 2 = 12 | 3.

Per Theor. 2

Aliter.

CASUS I.

$$\left.\begin{array}{c} \frac{12}{2} \;\infty\; \frac{18}{3} \\ \frac{10}{2} \;\infty\; \frac{15}{3} \end{array}\right\} S$$

$$\frac{2}{2} \;\infty\; \frac{3}{3}$$ per Axioma 3.

Erit in proportione, quæ ex rationis æqualitatis

2 — 2 = 3 | 3.

CASUS II.

$$\left.\begin{array}{c} \frac{12}{2} \;\infty\; \frac{18}{3} \\ \frac{4}{2} \;\infty\; \frac{6}{3} \end{array}\right\} S.$$

$$\frac{8}{2} \;\infty\; \frac{12}{3}$$

Hoc eſt in proportione

8 — 2 = 12 | 3.

PROPOSITIO VII.

1. *Æquales A & A ad eandem C eandem habent rationem.*

2. *Et eadem C ad æquales A & A eandem habet rationem.*

DEMONSTRATIO.

PARS I.

A C A C.
12 — 4 = 12 | 4.

PARS II.

C A C A.
4 — 12 = 4 | 12.

Quia utrobique producta ſunt æqualia. per Th: 2.

Pro-

PROPOSITIO VIII.

1. *Inæqualium quantitatum A. B. major A ad eandem C majorem rationem habet, quam minor B.*

2. *Et eadem C ad minorem B majorem habet rationem quam ad majorem A.*

DEMONSTRATIO.

PARS I.

A B
16 ⋖ 8 ex hypoth.
——— utrinque divide per 5. C.

$\frac{16}{5} \lessdot \frac{8}{5}$. per Lemma 3.

Hoc eſt in proportione
16 — 5 ⋖ 8 | 5.

PARS II.

$\frac{5}{8} \gtrdot \frac{5}{16}$ D.

$\frac{5}{8} \gtrdot \frac{5}{16}$ per Lemma 4.

Hoc eſt in proportione.
5 — 8 ⋖ 5 | 16.

Ex hoc Theoremate patet eſſe

1 — 1 > 24 l 16.
Vel 1 — 2 > 12 l 16.
Vel 1 — 3 > 8 l 16.
Vel 1 — 4 > 6 l 16.

Præterea.

Vel 2 — 1 > 24 l 8.
Vel 2 — 2 > 12 l 8.
Vel 2 — 3 > 8 l 8.
Vel 2 — 4 > 6 l 8.

Denique

Vel 4 — 1 > 24 l 4.
Vel 4 — 2 > 12 l 4.
Vel 4 — 3 > 8 l 4.
Vel 4 — 4 > 6 l 4.

Præter alias 36 minoritatis proportiones, quæ ex hiſce numeris deduci poſſunt.

Jam ſequuntur ipſæ Libri quinti Propoſitiones.

PROPOSITIO I.

Si ſunt quotcunque magnitudines ſeu quantitates proportionales A.B.C. D.E.F. quemadmodum ſe habuerit una antecedentium ad ſuam conſequentem, ita omnes antecedentes G ſimul ſe habebunt ad omnes conſequentes etiam ſimul ſumptas H.

DEMONSTRATIO.

Sint in eadem inter ſe ratione

A 3 — 1 B
C 6 — 2 D } A
E 9 — 3 F

G 18 — 6 H.

Demonſtrandum eſt eſſe ſummam ad ſummam ut quælibet antecedens ad ſuam conſequentem.

Hoc eſt 18 — 6 = 3 | 1.
Deinde 18 — 6 = 6 | 2.
Denique 18 — 6 = 9 | 3.

Quia in qualibet proportione productum extremorum facta multiplicatione eſt æquale producto mediorum, quatuor illarum termini ſunt [a] proportionales. a 2 Coroll. Theor. 2.

PROPOSITIO II. & XXIV.

Si prima A ad ſecundam B eandem habuerit rationem, quam tertia C ad quartam D; habuerit autem & quinta E ad ſecundam B eandem rationem quam ſexta E ad quartam D; Etiam G, compoſita prima cum quinta ad ſecundam B, eandem habebit rationem quam H tertia cum ſexta ad quartam D.

DEMONSTRATIO.

	A		B		C		D	
Sit	4	——	2	=	6	|	3.	A.
E	10				F 15.			
G	14				H 21			

Si inſtituatur multiplicatio, producta erunt æqualia, ergo (a) iſtæ quantitates ſunt proportionales.

a Theor. 2.

Aliter

$\frac{4}{2}$ ꝏ $\frac{6}{3}$ } A.

$\frac{10}{2}$ ꝏ $\frac{15}{3}$

$\frac{14}{2}$ b ꝏ $\frac{21}{3}$ vel in proportione.

b Ax. 2.

14 —— 2 = 21. | 3. Q. E. D.

Pro-

PROPOSITIO III.

Si quatuor quantitates A. B. C. D. ſint proportionales; & prima A & tertia C per eundem quemlibet numerum G multiplicentur: productum primum E ſe habebit ad ſecundam B, quemadmodum productum ſecundum F ad quartam D.

DEMONSTRATIO.

A B C D.
4 —— 2 = 6 | 3. } M.
G 2 G 2
E 8 F 12

Demonſtrandum eſt

E B F D
8 —— 2 = 12 | 3.

Id quod (a) exinde patet, quod producta extremorum & mediorum ſunt æqualia. a Theor. 2.

Aliter

$\frac{4}{2}$ ꝏ $\frac{6}{3}$

———— utrimque multipl, per 2.

$\frac{8}{2}$ ꝏ $\frac{12}{3}$ Lemna 2.

Hoc eſt in proportione
8 —— 2 = 12 | 3.

Pro-

PROPOSITIO. IV.

Si quatuor quantitates A. B. C. D. ſint proportionales; prima vero A & tertia C. per quemlibet eundem numerum G multiplicentur; ut & ſecunda B & tertia D per alium numerum K. quatuor iſta producta inter ſe proportionalia erunt.

DEMONSTRATIO.

Sint quatuor proportionales

A	B	C	D
4 —— 2	=	6 | 3	M
G 2	K 3	G 2	K 3
E 8	L 6	F 12	M 9

Demonſtrandum eſt quatuor producta E. L. F. M. eſſe proportionalia ſeu

8 —— 6 = 12 | 9.

Quod ex Theor. 2 ſequitur, quia facta multiplicatione producta extremorum & mediorum inter ſe ſunt æqualia.

Aliter

$$\frac{4}{2} \infty \frac{6}{3}$$

———————— multipl. per 2.

$$\frac{8}{2} \infty \frac{12}{3}$$ Lemma 2.

———————— divide per 3,

$$\frac{8}{6} \infty \frac{12}{9}$$ per idem Lemma 2.

Hoc eſt in proportione

8 —— 6 = 12 | 9.

Pro-

PROPOSITIO V. XIX.

Si totum A ad totum B eandem habuerit rationem, quam ablata pars C ad partem ablatam D: etiam pars reliqua E ad partem reliquam F, eandem habebit rationem, quam totum A ad totum B.

DEMONSTRATIO.

A	8	4	B	S
C	6	3	D	

Erit	E	F	A	B.
	2 —	1 =	8 l	4.

Quia producta ſunt æqualia. per Theor. 2.

PROPOSITIO VI.

Si prima A ad ſecundam B eandem habuerit rationem, quam tertia C ad quartam D, habuerit autem & quinta E ad ſecundam B eandem rationem quam ſexta F ad quartam D. Si quinta E ſubtrahatur a prima A, & ſexta F ac tertia C,

Vel reſiduum primum G erit æquale ſecundæ B & reſiduum ſecundum H æquale quartæ D.

Vel reſiduum primum G ſe habebit ad ſecundam B ſicut reſiduum ſecundum H ad quartam D.

DEMONSTRATIO.

CASUS I.

A		B		C		D
12	—	2	=	18		3
E 10				F 15.		
G 2				H 3.		

CA-

CASUS II.

A		B		C		D	
12	—	2	⫶	18	ǀ	3.	S
E 4				F 6			
Erit G		B		H		D.	
8	—	2	⫶	12		3.	

Per Theor. 2

Aliter.

CASUS I.

$$\left.\begin{array}{c}\frac{12}{2} \;\infty\; \frac{18}{3} \\ \frac{10}{2} \;\infty\; \frac{15}{3}\end{array}\right\} S$$

$$\frac{2}{2} \;\infty\; \frac{3}{3}$$ per Axioma 3.

Erit in proportione, quæ ex rationis æqualitatis

2 — 2 ⫶ 3 ǀ 3.

CASUS II.

$$\left.\begin{array}{c}\frac{12}{2} \;\infty\; \frac{18}{3} \\ \frac{4}{2} \;\infty\; \frac{6}{3}\end{array}\right\} S.$$

$$\frac{8}{2} \;\infty\; \frac{12}{3}$$

Hoc est in proportione

8 — 2 ⫶ 12 ǀ 3.

PROPOSITIO VII.

1. *Æquales A & A ad eandem C eandem habent rationem.*

2. *Et eadem C ad æquales A & A eandem habet rationem.*

DEMONSTRATIO.

PARS I.

A		C		A		C.
12	—	4	=	12	|	4.

PARS II.

C		A		C		A.
4	—	12	=	4	|	12.

Quia utrobique producta ſunt æqualia. per Th: 2.

Pro-

PROPOSITIO VIII.

1. *Inæqualium quantitatum A. B. major A ad eandem C majorem rationem habet, quam minor B.*

2. *Et eadem C ad minorem B majorem habet rationem quam ad majorem A.*

DEMONSTRATIO.

PARS I.

A   B
16   <   8 ex hypoth.
——————utrinque divide per 5. C.

$\frac{16}{5} < \frac{8}{5}.$ per Lemma 3.

Hoc eſt in proportione
16 — 5 < 8 | 5.

PARS II.

5 ∞ 5 } D.
8 > 16 }

————————————————

$\frac{5}{8} > \frac{5}{16}$ per Lemma 4.

Hoc eſt in proportione.
5 — 8 > 5 | 16.

PROPOSITIO IX.

1. *Si A & B ad eandem C habeant eandem rationem, illæ æquales inter ſe erunt.*

2. *Et ſi eadem C ad A & B habeat eandem rationem, illæ itidem æquales erunt.*

DEMONSTRATIO.

PARS I.

A C B C

15 — 4 = 15 | 4.

Ergo $\frac{15}{4}$ ꝏ $\frac{15}{4}$.

multipl. per 4.

15 ꝏ 15.

PARS II.

C H C B

4 — 15 = 4 | 15.

Ergo $\frac{4}{15}$ ꝏ $\frac{4}{15}$

mult. per 15.

15 · x · 4 ꝏ 15 · x · 4. per Lem. 2.

div. per 4.

15 ꝏ 15. per idem Lemma 2.

Pro-

PROPOSITIO. X.

1. *Si A ad C majorem rationem habet quam B ad eandem C, erit A major quam C.*

2. *At ſi eadem C ad B majorem rationem habuerit quam ad A, erit B minor quam A.*

DEMONSTRATIO.

PARS I.

A		C		B		C
16	—	4	$<$	8	|	4.

Ergo $\frac{16}{4} < \frac{8}{4}$.

——————— mult. per 4.

16 $<$ 8. per Lemma 3.

PARS II.

C		B		C		A.
4	—	8	$<$	4	|	16.

$\frac{4}{8} < \frac{4}{16}$

——————— Multipl. per 8.

$4 < \frac{4 \cdot x \cdot 8}{16}$ per Lemma.

Mul-

———————— Multipl. per 16.

4 . x . 16 $<$ 4 . x . 8. Lem. 3.

———————————— div. per 4.

16 $<$ 8.

Alio modo.

A C B C

16 —— 4 $<$ 8 | 4.

Ergo 4 . x . 16 $<$ 4 . x . 8. The. 3.

———————————— div. per 4.

16 $<$ 8. Lemma 3.

PARS II.

C B C A.

4 — 8 $<$ 4 | 16.

Ergo 4 . x . 16 $<$. x . 8. Theor. 4.

———————————— div: per 4.

16 $<$ 8. Lemma 3.

PRO-

PROPOSITIO XI.

Rationes, quæ eidem rationi ſunt eædem, vel ſimiles vel æquales, inter ſe ſunt eædem vel ſimiles vel æquales.

DEMONSTRATIO.

Sit 8 — 4 = 6 | 3.
Et 10 — 5 = 6 | 3.

Erit 8 — 4 = 10 | 5.

Quia nimir. producta ſunt æqualia. per Theor. 2. Vel ſic.

$$\frac{8}{4} \infty \frac{6}{3}.$$

$$\frac{10}{5} \infty \frac{6}{3}.$$

$$\text{Ergo } \frac{8}{4} \infty \frac{10}{5} \text{ Ax. I.}$$

Hoc eſt in proportione.

8 — 4 = 10 | 5.

PROPOSITIO XII.

Hæc eſt eadem cum prima, quæ videri poteſt.

PROPOSITIO XIII.

Si prima ratio ſit æqualis ſecundæ rationi; ſecunda vero ſit major tertiâ: ſimiliter etiam prima tertia major erit.

DEMONSTRATIO.

Sit 16 —— 8 = 12 | 6.
At vero 12 —— 6 < 4 | 3.

Ergo 16 —— 8 < 4 | 3.

Quia productum extremorum eſt majus producto mediorum. per 2 Coroll. Theor: 4.

Vel hoc modo.

$$\frac{16}{8} \infty \frac{12}{6}.$$

$$\text{Atqui } \frac{12}{6} < \frac{4}{3}.$$

$$\text{Ergo } \frac{16}{8} < \frac{4}{3}$$

—————— Et in proportione
16 —— 8 < 4 | 3.

Pro-

PROPOSITIO XIV.

Si quatuor proportionalium A. B. C. D. prima A fuerit major tertia C, erit & ſecunda major quarta D.

Si A æqualis C erit B æqualis D.

Si A minor C, erit B minor D.

DEMONSTRATIO.

CASUS I.

$$
\begin{array}{llll}
A & B & C & D \\
12 \;—\; 8 & = & 6 \mid 4. &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\text{Ergo } 12 \cdot x \cdot 4 \propto 8 \cdot x \cdot 6. \;\}\; \text{Div.} \\
\quad 12 \qquad\qquad < 6 \\
\hline
\quad 4 \qquad\qquad > 8. \text{ per Lemma 4.}
\end{array}
$$

CASUS II.

$$
\begin{array}{llll}
A & B & C & D. \\
12 \;—\; 4 & = & 12 \mid 4. &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\text{Ergo } 12 \cdot x \cdot 4 \propto 12 \cdot x \cdot 4. \;\}\; \text{D.} \\
\quad 12 \qquad\qquad \propto 12 \\
\hline
\qquad\qquad 4 \propto 12. \text{ Per Lemma 2.}
\end{array}
$$

CASUS III.

$$
\begin{array}{llll}
A & B & C & D. \\
4 \;—\; 6 & = & 8 \mid 12. &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\text{Ergo } 4 \cdot x \cdot 12 \propto 6 \cdot x \cdot 8. \;\}\; \text{D.} \\
\quad 4 \qquad\qquad > 8 \\
\hline
\quad 12 \qquad\qquad < 6. \text{ Lemma 4.}
\end{array}
$$

PROPOSITIO XV.

Si duæ quantitates A & B æqualibus vicibus ſumantur ſeu per eundem numerum multiplicentur, ſummæ ſeu producta habebunt inter ſe eandem rationem quam habent poſitæ quantitates A & B.

DEMONSTRATIO.

A B

4 12 M.

2 2

Erit 8 — 24 = 4 l. 12.

Quia producta ſunt æqualia. Theor: 2.

SCHOLIUM.

Si eædem quantitates A & B per eundem numerum dividantur, quotientes ipſis quantitatibus proportionales erunt.

A B

4 12 D.

2 2

2 — 6 = 14 l 12. per Th: 2.

Pro-

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor quantitates A.B.C. D. proportionales fuerint, illæ etiam viciſſim proportionales erunt.

DEMONSTRATIO.

A B C D
16 — 8 ∷ 4 l 2.

Erit etiam viciſſim, ſeu permutando.

16 — 4 ∷ 8 l 3.

Quia facta multiplicatione producta ſunt æqualia, per Theor: 2.

SCHOLIUM.

Commode hic demonſtratur ratio inverſa. Sint Proportionales.

A. B C D.
16 — 8 ∷ 4 l 2.

Erit per Theor. I.

16 ·x· 2 ∞ 8 ·x· 4.

Ergo per Theor: 2.

2 — 4 ∷ 8 l 16. Q.E.D.

PROPOSITIO XVII.

Si compoſitæ quantitates proportionales fuerint, illæ quoque diviſæ proportionales erunt.

DEMONSTRATIO.

A B C D.
16 — 12 = 8 | 6.

Erit quoque dividendo.

$$\frac{16 \div 12}{\text{ſeu } 4} — 12 = \frac{8 \div 6}{\text{ſeu } 2} \mid 6.$$

Id quod multiplicatione probatur per Theor. 2.

Vel alio modo per prop: 6 hujus

16 — 12 = 8 | 6. } S
12 — 6

4 — 12 = 2 | 6. Q. D. E.

SCHOLIUM.

Cum ratio converſa commode hic inſeri poſſit, ſint proportionales.

16 — 12 = 8 | 6.

Erit convertendo

$$16 — \frac{16 \div 12}{\text{ſ. } 4} = 8 \mid \frac{8 \div 6}{\text{ſ. } 2}.$$

Quia nim: producta ſunt æqualia. per Theor: 2.

Pro-

PROPOSITIO XVIII.

Si diviſæ quantitates proportionales fuerint, illæ quoque compoſitæ proportionales erunt.

DEMONSTRATIO.

A B C D.
4 — 12 = 2 | 6.
Erit componendo.

4 + 12 ſ. 16 — 12 = 2 + 6 ſ. 8 | 6.

Per Theor: 2. cum producta ſint æqualia.

Aliter per prop. 2. hujus.

4 — 12 = 2 | 6
12 6 } A.

16 — 12 = 8 | 6.

PROPOSITIO XIX.

Vide propoſ. 5. quæ cum hac eſt eadem.

PROPOSITIO XX.

Hac demonſtrabitur poſt pr. 22.

Pro-

PROPOSITIO XXI.

Et hæc poſt propoſ. 23.

PROPOSITIO XXII.

Si fuerint quotcunque quantitates. A. B. C. & aliæ numero æquales D. E. F. fuerit autem ordinate ut A ad B. ſic D ad E: & ut B. ad C ita E ad F: illæ ex æqualitate ordinatâ in eadem ratione erunt; hoc eſt A ad C. ut D ad F.

DEMONSTRATIO.

Poſitæ ſint quantitatos

A	B	C.
16	8	4.
D	E	F.
12	6	3.

Ita ut ſit

A	B	D	E.
16—	8 =	12 l	6.

Et

B	C	E	F.
8	4 =	6 l	3.

Erit

Erit ex æqualitate ordinata.

A C D F.
16 — 4 = 12 | 3.

Per multiplicationem extremorum & mediorum juxta Theor: 2.

Alio modo

16 — 8 = 12 | 6 8 — 4 = 6 | 3.
viciſſim 16. V, viciſſim 16. V.
16 — 12 = 8 | 6 8 — 6 = 4 | 3.

Atqui etiam
4 — 3 = 8 | 6.

Ergo 11. V.
16 — 12 = 4 | 3.

Et viciſſim 16. V.
A C D F.
16 — 4 = 12 | 3.

Hiſce ſic demonſtratis dicit propoſitio 20.

Si prima A fuerit < tertia C, etiam quartam D fore < ſexta F.

Si A ſit = C. fore D = F.

Si A ſit > C. fore D > F.

Quæ omnia ex prop: 14 patent ſi ultima proportio permutetur ut ſit
16 — 12 = 4 | 3.

PROPOSITIO XXIII.

Si fuerint tres quantitates A. B. C, & aliæ tres D. E. F, fuerit autem perturbate ut A ad B ita E ad F; & ut B ad C ita D ad E: illæ ex æqualitate perturbata in eadem ratione erunt ſc. A erit ad C ut D ad F.

DEMONSTRATIO.

Poſitæ ſint quantitates A B C.
16 8 2.
D E F.
24 6 3.

Ita ut ſit
16 — 8 = 6 | 3.
Et
8 — 2 = 24 | 6.
Erit ex æquo
16 — 2 = 24 | 3.

Quia multiplicando acquiruntur producta æqualia. Ergo per Theor. 2. illæ quantitates proportionales.

Alio

Alio modo

16 — 8 = 6 | 3. | 8 — 2 = 24 | 6.

Ergo Theor. I. | Theor. I.

3 . x . 16 ꝏ 8 . x . 6. | 8 . x . 6 ꝏ 2 . x . 24

Ergo per Ax. I.

3 . x . 16 ꝏ 2 . x . 24.

Adeoque per Theor. 2.

A C D F.

16 — 2 = 24 | 3.

Quibus poſitis dicit propoſitio 21.

Si ſit prima A < tertia C, etiam quartam D fore majorem ſexta F.

Si A ſit ꝏ C, fore D ꝏ F.

Si A ſit > C, fore D > F.

Quæ omnia rurſus ex 14 V. patent, ſi ultima proportio permutetur, ut ſit

16 — 24 = 2 | 3.

PROPOSITIO XXIV.

Hæc eſt eadem cum prop. 2. quæ videri poteſt.

PROPOSITIO XXV.

Si quatuor quantitates A. B. C. D. proportionales fuerint: maxima A ſimul cum minima D. reliquis duabus B. C. ſimul ſumptis majores erunt.

DEMONSTRATIO.

A B C D

12 — 4 = 9 — 3.

Permutando. 16. V.

12 — 9 = 4 — 3.
dividendo 17. V.

12 < 4 ex hyp,
Ergo 9 < 3. 14. V.

3 — 9 = 1 — 3.

Atqui 9 < 3.

Ergo 3 < 1.

A. Duæ ultimæ.

9 + 3 ∞ 9 + 3. C. D.

12 + 3 < 4 + 9.

Hoc eſt A & B ſimul < B & C.

Q. E. D.

Reliquæ ſequentes novem propoſitiones non ſunt Euclidis; poſſunt tamen, eadem, qua præcedentes Euclidis, facilitate demonſtrari.

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

Si prima A ad ſecundam B habuerit majorem rationem quam tertia C ad quartam D, habebit invertendo quarta D ad tertiam C majorem rationem quam ſecunda B ad primam A.

DEMONSTRATIO.

A B C D.

Sit $8 \div 4 < 5 \mid 3$.

Erit per Theor. 3.

$3 \times 8 < 5 \times 4$.

Ergo per Theor. 4.

$3 \div 5 < 4 \mid 8$.

Q.E.D.

PROPOSITIO XXVII.

Si prima A ad ſecundam B habuerit majorem rationem, quam tertia C ad quartam D, habebit quoque viciſſim prima A ad tertiam C, majorem rationem quam ſecunda B ad quartam D.

DEMONSTRATIO.

A B C D.

Sit 8 — 4 < 5 | 3.

Erit 8 · x · 3 < 5 · x · 4. Th: 3.

Ergo per Theor: 4.

8 — 5 < 4 | 3.

Q. E. D.

PROPOSITIO. XXVIII.

Si prima A ad ſecundam B habuerit majorem rationem quam tertia C ad quartam D. habebit quoque compoſita prima cum ſecunda ad ipſam ſecundam B majorem rationem quam compoſita tertia cum quarta ad ipſam quartam D.

DEMONSTRATIO.

A B C D.

Sit 8 — 4 < 5 | 3.

Erit quoque

$\frac{8 + 4}{\text{ſeu } 12} — 4 < \frac{5 + 3}{\text{ſeu } 8} | 3.$

Quia productum extremorum eſt majus producto mediorum. per Theor: 4.

Aliter.

$\frac{8}{4} < \frac{5}{3}$

$\frac{4}{4} \infty \frac{3}{3}$

$\frac{12}{4} < \frac{8}{3}$ Ax. 4.

Hæc eſt, 12 — 4 < 8 | 3.

Pro-

PROPOSITIO XXIX.

Si prima A ad ſecundam B *habuerit majorem rationem quam tertia C ad quartam D, habebit dividendo prima minus ſeu demta ſecunda, ad ipſam ſecundam* B *majorem rationem, quam tertia minus ſeu dempta quarta ad ipſam quartam D.*

DEMONSTRATIO.

A B C D.

Sit 12 — 4 < 8 ⊦ 3.

Erit quoque

$$\frac{12 \div 4}{\text{ſeu } 8} — 4 < \frac{8 \div 3}{\text{ſeu } 5} | 3.$$

Per Theor. 4. Quia productum extremorum eſt majus producto mediorum. Vel etiam hoc modo.

$$\frac{12}{4} < \frac{8}{3}$$

$$\frac{4}{4} \propto \frac{3}{3} \quad \Big\} S$$

$$\frac{8}{4} < \frac{5}{3} \text{ per Ax: 5}$$

Hoc eſt 8 — 4 < 5 | 3. Q: E. D.

Pro-

PROPOSITIO XXX.

Si prima A ad ſecundam B majorem habuerit rationem, quam tertia C ad quartam D; habebit per rationis converſionem, prima ad ipſam primam minus ſeu dempta ſecunda majorem rationem quam tertia ad ipſam tertiam minus quarta.

DEMONSTRATIO.

A	B		C	D.
12 —	4	<	8 |	3.

Demonſtrandum eſt quod ſit

12 — 12 ÷ 4 > 8 | 8 ÷ 3.
ſeu 8 ſeu 5.

Id quod patet ex multiplicatio-tionem : quia nim. productum extremorum eſt minus producto mediorum, per Theorema 6.

PROPOSITIO XXXI.

Si fuerint tres quantitates A. B.C. & aliæ tres D.E.F. ſitque major ratio primæ priorum A ad ſecundam B, quam primæ poſteriorum D ad ſuam ſecundam E: ut & major ratio ſecundæ priorum B ad ſuam tertiam C, quam ſecundæ poſteriorum E ad ſuam tertiam F: Erit quoque ex æqualitate ordinata major ratio primæ priorum A ad ſuam tertiam C, quam primæ poſteriorum D, ad ſuam tertiam F.

DEMONSTRATIO.

A	B	C
16	8	4
D	E.	F.
9	5	3.

Sit 16 — 8 < 9 | 5.
Et 8 — 4 < 5 | 3.

Erit ex æquo.

16 — 4 < 9 | 3.

Id

Id quod patet ex multiplicatione, cum productum extremorum ſit majus producto mediorum; per Theor: 4.

Aliter.

16 — 8 < 9 l 5.

viciſſim. 27. V.

16 — 9 < 8 l 5.

Et

8 — 4 < 5 l 3.

viciſſim. 27. V.

8 — 5 < 4 l 3.

Ergo.

16 — 9 < 4 l 3.

Viciſſim.

16 — 4 < 9 l 3.

Q. E. D.

PROPOSITIO. XXXII.

Si ſint tres quantitates A. B. C. & aliæ tres D. E. F. ſitque major ratio primæ priorum A ad ſuam ſecundam B quam ſecundæ poſteriorum E ad ſuam tertiam F: ut & ratio ſecundæ priorum B ad ſuam tertiam C major quam primæ poſteriorum D ad ſuam ſecundam E. Erit quoque ex æqualitate perturbata major ratio primæ priorum A ad ſuam tertiam C, quam primæ poſteriorum D ad ſuam tertiam F.

DEMONSTRATIO.

A	B	C
16	8	5
D	E	F.
9	6	4

Sit 16 — 8 < 6 | 4.

Ut & 8 ÷ 5 < 9 | 6.

Erit ex æquo.

16 — 5 < 9 | 4,

Per Theor: 4. Quia ſcilicet productum extremorum eſt majus producto mediorum.

Alio modo.

$16 \text{ — } 8 < 6 \mid 4.$

Ergo $16 \cdot \text{x} \cdot 4 < 8 \cdot \text{x} \cdot 6.$

Et

$8 \text{ — } 5 < 9 \mid 6.$

$8 \cdot \text{x} \cdot 6 < 5 \cdot \text{x} \cdot 9.$

Ergo.

$16 \cdot \text{x} \cdot 4 < 5 \cdot \text{x} \cdot 9.$

Adeoque $16 \text{ ——— } 5 < 9 \mid 4.$
per Theor: 4.

PROPOSITIO XXXIIII.

Si fuerit major ratio totius A ad totum B, quam ablati C ad ablatum D, erit & reliqui E ad reliquum F major ratio quam totius A ad totum B.

DEMONSTRATIO.

Sint in majori ratione tota

	A.	B.	
	12	6	S
quam partes	4	3	D

Erit 8 — 3 $<$ 12 16.

Per Theor: 4. quia productum extremorum eſt majus producto mediorum.

Pro-

PROPOSITIO XXXIV.

Si ſunt quotcunque quantitates, A. B. C. & aliæ æquales numero D. E. F. ſitque major ratio primæ priorum A ad primam poſteriorum D, quam ſecundæ B ad ſecundam E: ut & ſecundæ B ad ſecundam E major, quam tertiæ C ad tertiam F, & ſic deinceps.

1. *Habebunt omnes priores, ſimul A. B. C. ad omnes poſteriores ſimul D. E. F. majorem rationem, quam omnes priores B. C. relicta prima A, ad omnes poſteriores E. F. relicta quoque prima D.*

2. *Minorem autem quam prima priorum A ad primam poſteriorum F.*

3. Ma-

3. *Majorem denique quam ultima priorum C ad ultimam poſteriorum F.*

DEMONSTRATIO.

Poſitæ ſint quantitates

	Priores		Poſteriores.
	A 12		D 6
	B 8		E 5
	C 4		F 3.
Summæ	24.		14.

PARS I.			B + C		E + F.
24 — 14	$<$	12	ǀ	8.
PARS II.			A		D.
24 — 14	$>$	12	ǀ	6.
PARS III.			C		F.
24 — 14	$<$	4		3.

Partis 1 & 3 demonſtratio pendet ex Theoremate 4. quia producta extremorum ſunt majora productis mediorum.

Pars vero 2 demonſtratur per The. 6, quia productum extremorum eſt minus producto mediorum.

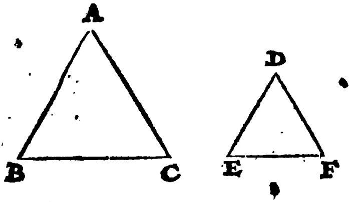
FINIS LIBRI QUINTI.

Eu-

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

1. *Similes figuræ rectilineæ ſunt, quæ & angulos ſingulos ſingulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales ſunt, proportionalia.*



AD conſtituendam figurarum rectilinearum ſimilitudinem requiruntur duæ conditiones.

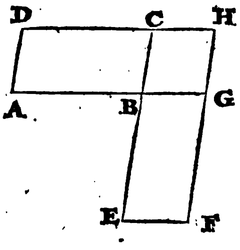
1. Ut ſinguli ſingulis inter ſe ſint æquales anguli A & D: B. & E: C & F.

2. Ut latera circum iſtos æquales angulos ſint proportionalia, ſcil.

Circa A. D BA ∸ AC = FD l DF.
Circa B. E CB — BA = FE l ED.
Circa C. F BC ÷ CA = EF l FD.

Ergo ſi una ex hiſce conditionibus deficiat, figuræ nullo modo erunt ſimiles: quemadmodum quadratum & altera parte longior figura, licet habeant omnes angulos æquales, utpote rectos, quia vero latera non habent proportionalia, ſimilia dicenda non ſunt.

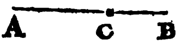
2. *Reciprocæ figuræ ſunt, cum in utraque figura antecedentes & conſequentes rationum termini fuerint.*



Quemadmodum in parallelogrammis AC. BF. & ductis diagonalibus in triangu-

gulis ABC. BEF. ſi ſit AB in prima figura ad BG ſecundæ, ſicut reciproce EB ſecundæ ad BC primæ, illæ dicuntur reciprocæ.

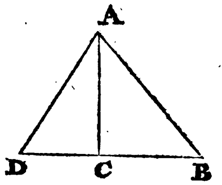
3. *Recta AB dicitur ſecta eſſe ſecundum extremam & mediam rationem, cum fuerit ut tota AB ad majus ſegmentum AC. ita idem majus ſegmentum AC ad minus ſegmentum CB.*



In propoſitione 11. Libri II. Euclides docuit ſecare lineam ita ut □ ſub tota linea AB & minori ſegmento CB comprehenſum ſit æquale □ majoris ſegmenti AC: quod unum & idem eſſe cum hac Definitione videri poteſt ex prop: 30. VI Unde patet 11. II. hic inter Definitiones reponi.

Cæterum ob multiplicem illius uſum Geometris hæc proportio divina dicitur.

4. *Altitudo cujuſque figuræ eſt linea perpendicularis AD, ab illius vertice ad ipſam baſin vel illius productam demiſſa.*



Cum menſura cujuſque rei debeat eſſe certa determinata, non vero vaga & incerta, & diſtantia puncti alicujus verticalis a linea oppoſita per certam, & ſibi ſemper æqualem ac minimam menſurari debet lineam. Sic diſtantia puncti verticalis A a linea ſeu baſi DB, non menſuranda eſt juxta lineas oblique ductas AD, AB, quia illæ quaſi infinitæ duci poſſunt, nec inter ſe æquales ſunt; ſed ſolummodo per lineam perpendiculariter ductam AC, quæ eſt certa, unica & minima: quæ hoc in caſu ſemper quæritur. Et hæc perpendicularis AC. dicitur altitudo trianguli ADB, ſumpta DB pro baſi: quemadmodum ſumpta AD pro

baſi:

baſi, perpendicularis ex B ad AD ducta altitudinem exhibebit: ut & ſumtâ AB pro baſi faciet perpendicularis ex D ad AB demiſſa.

Quia vero per punctum A duci poteſt linea parallela ipſi DB, illa altitudo dicitur eſſe in iiſdem parallelis; unde ſi duo triangula ſint in eadem altitudine idem eſt ac ſi dicantur eſſe in iiſdem parallelis. ut loquitur Euclides Lib. I.

5. *Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter ſe multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.*

Supra notavimus rationem nihil aliud revera eſſe quam modum continendi quo una quantitas aliam quantitatem continet vel ab alia continetur; quique non clarius, quam per fractionem exprimatur.

Si ergo datæ ſint duæ rationes 2 ad 3, & 4 ad 5, illæ ad fractiones redactæ ſic ſtabunt $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$, quæ ſi inter ſe multiplicentur, obtinebitur $\frac{8}{15}$ ſeu ratio 8 ad 15, pro quæſita ratione quæ ex duabus datis

compoſita eſt. Sic ratio quæ ex dupla & tripla, ſeu ex duabus rationibus 2 ad 1 & 3 ad 1, hoc eſt ex duabus fractionibus $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{1}$ compoſita eſt, habebitur $\frac{6}{1}$ ſeu ratio 6 ad 1 ſeu ſextupla. Et ſic porro de aliis.

Notandum autem eſt rationum ab Euclide ſic dictas quantitates Geometris vulgo dici Denominatores, quæ in fractionum conſideratione quotientum nomine venire ſolent.

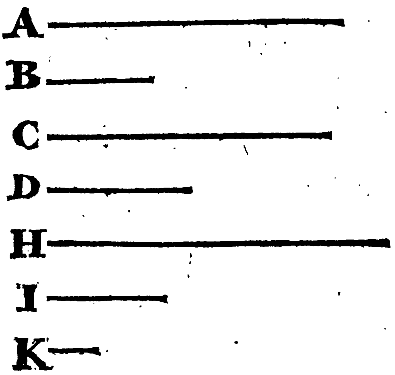
Sed minime omittendum putamus rationem $\frac{8}{15}$ ſeu 8 ad 5 (quæ ex rationibus $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$ ſeu 2 ad 3 & 4 ad 5 componitur) etiam hoc modo poſſe inveniri.

Fiat 2 —— 3 = quilibet numerus 6 | 9.
Tum 4 —— 5 = 9 | $\frac{45}{4}$.

Dico rationem 6 ad $\frac{45}{4}$ ſeu utrinque per eundem numerum 4 multiplicando 24 ad 45 eſſe eandum cum ratione 8 ad 15. Si enim fractio $\frac{24}{45}$ per 3 reducatur ad minimam, obtinebitur $\frac{8}{15}$ ut requiritur; unde

patet

patet rationem 6 ad $\frac{15}{4}$ eſſe compoſitam ex duabus rationibus 2 ad 3 & 4 ad 5.



Quæ omnia lineis hac ratione applicari poſſunt. Datæ ſint duæ rationes A ad B. & C ad D, rationem ex iſtis duabus compoſitam hoc modo inveniemus.

Fiat A —— B = H I I.
Ut & CD —— D = I I K.

Ratio H ad K exhibebit rationem compoſitam quæſitam.

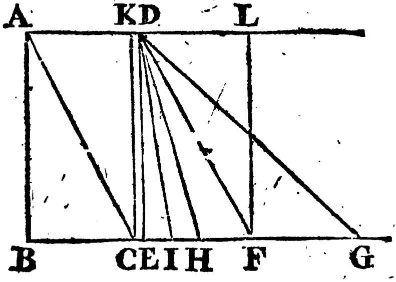
Pro H aſſumere licet quamlibetcunque lineam.

Pro-

PROPOSITIO I.

Theor. 1.

Triangula ABC. DEF. & parallelogramma BK EL, in eadem altitudine ſive inter eaſdem parallelas conſtituta, ſunt inter ſe ut baſes BC EF. hoc eſt ſi baſes ſint æquales figuræ erunt æquales: ſi baſes inæquales figuræ erunt inæquales & quidem juxta rationem baſium.



DEMONSTRATIO.

1. Sit baſis BC ∞ EF. Tum triangula ABC. DEF, inter eaſdem parallelas & ſuper baſibus æqualibus conſtituta inter
38. 1. ſe ſunt æqualia. 2. Po-

2. Ponatur EG dupla ipſius EF, ſeu BC. Tum erunt duo DEF. DFG [a] æqualia: adeoque totum DEG duplum ipſius DEF hoc eſt ABC: quia nim. baſis EG eſt dupla ipſius BC.

3. Ponatur EH dimidia baſeos EF ſeu BC. adeoque $\frac{1}{4}$ EG. Erunt duo triangula DEH. DHF [a] æqualia: ergo DEH erit ſemiſſis ipſius DEH, hoceſt ABC: & quarta pars ipſius DEG.

4. Ponatur EI ∞ $\frac{1}{2}$ EH. ſeu $\frac{1}{4}$ EF. ſeu $\frac{1}{8}$ EG. ſimiliter erit triangulum [a] DEI ∞ DIH. adeoque DEI erit ∞ $\frac{1}{2}$ DEH. ſeu $\frac{1}{4}$ DEF hoc eſt ABC. ſeu $\frac{1}{8}$ DEG.

Et ſic potro in infinitum.

Ergo abſolute triangula ſe habent ut illorum baſes.

Similiter etiam parallelogramma, cum dupla [b] ſunt triangulorum.

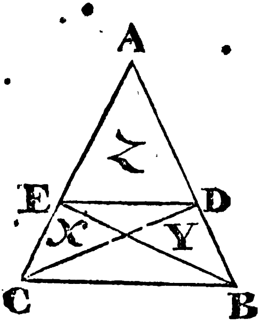
b 39. 1.

Theor. 2.

PROPOSITIO II.

1. *Si in triangulo uni lateri CB parallela ducatur ED, hæc proportionaliter ſecabit latera AC AB. (hoc eſt ut ſit AE — EC = AD / DB.*

2. *Et ſi recta ED ſecuerit latera AC. AB proportionaliter, erit illa reliquo lateri CB parallela.*



DEMONSTRATIO.

1 Pars. Ducantur rectæ CD. BE. eruntque triangula X & Y in iiſdem parallelis DE. CB & eadem baſi ED, ergo inter ſe [a] æqualia. Triang.

a 37. 1.

Tri. Z — Tri. X [b] = baſ: AE / baſ: EC. b 1. VI.
ſeu Y

Atqui etiam

Tr: Z — Tr: Y [b] = baſ: AD / baſ: DB.

Ergo [c] AE — EC = AD / DB. c 11. V.

2 Pars. Eſt ex hypotheſi.

AE — EC = AD / DB.

Atqui

AE — EC = Z / · X ·
Et AD — DB = Z / · Y · } 1. VI.

Ergo hiſce rationibus ſubſtitutis.

Erit Z — X = Z / · Y ·

Adeoque [d] triang. X ∞ Y & quia d 14. V.
ſunt in eadem baſi ED, erunt inter [e] parallelas ED. CB. e 39. I.

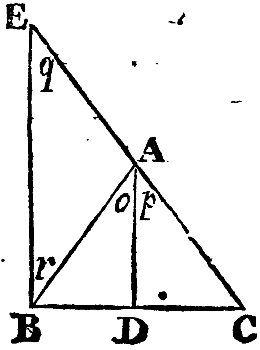
Q. E. D.

Theor. 3.

PROPOSITIO III.

1. *Si in triangulo ABC, recta AD angulum A bifariam ſecans, etiam ſecet baſin BC, habebunt baſis ſegmenta BD. DC eandem rationem, quam reliqua latera BA. AC.*

2. *Et ſi baſis ſegmenta* BD. *DC eandem habeant rationem quam reliqua latera* BA. *AC, recta* AD. *baſin ſecans, etiam angulum oppoſitum A ſecabit bifariam.*



DEMONSTRATIO.

Pars I. Ex B ducatur BE parallela DA, & producatur CA, uſque ad occurſum perpendicularis in E: eruntque propter parallelas EB. DA. a 31. I.

Ang. O ∞ R. quia ſunt alterni.
Ang. P ∞ Q. externus interno } 29. I.

Atqui O ∞ P ex hypotheſi.
Ergo R ∞ Q. Et latus EA [b] ∞ BA. b 6. I.
Quare [c] erit EA — AC = BD / DC. c 2. VI.
BA

PARS II.

Eſt BA — AC = BD / DC. ex h. d 2. VI.
Atqui [d] EA — AC = BD / DC.

Ergo 11. V.
BA — AC = EA / AC. e 14. V. f 5. I.

Adeoque [e] BA ∞ AE & ang. R [f] ∞ Q.
Atqui ang. R ∞ O
Ut & Q ∞ P } 29. I.

Ergo O ∞ P.

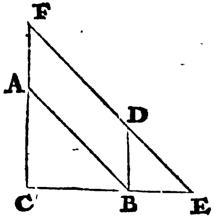
Q. E. D.

Theor. 4.

PROPOSITIO IV.

Triangula ſibi mutuo æquiangula, ſunt ſimilia; hoc eſt [a] *etiam latera circa æquales angulos habent proportionalia.*

a Def. 1. VI.



DEMONSTRATIO.

Baſes CB, BE colloca in directum: quia jam angulus ACB ∞ DBE, ex hypotheſi, erunt [b] CA & BD parallelæ, ut & AB DE. quia ang. ABC etiam ponitur ∞ E.

b 28. I.

Pro-

Producantur CA & ED in F, eritque AFDB parallelogrammum, adeoque FA [c] ∞ DB & FD ∞ AB. c 34. I.

Quia in triangulo FCE latus AB eſt parallelum FE erit [d] d 2. VI.

AC — AF ≍ CB / BE.
DB

Et permutando. 16. V.

AC — CB ≍ DB / BE.

Deinde

Quia in triangulo EFC latus DB eſt parallelum FC.

Erit FD [d] — DE ≍ CB / BE.
AB

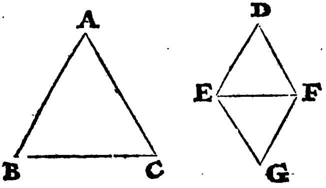
Et viciſſim. 16. V.

AB — BC ≍ DE / EB.

Theor. 5.

PROPOSITIO V.

Si duo triangula ABC. DEF, latera circa omnes angulos habeant proportionalia, erunt æquiangula, eoſdem angulos A & D, B & E, F & C habebunt æquales, quibus homologa latera ſubtenduntur.



DEMONSTRATIO.

a 23. 1.

Ad punctum E fiat [a] angulus FEG ꝏ B. ut & ad punctum F angulus EFG ꝏ C. eritque tertius G æqualis tertio A.

Quare in triangulis ſimilibus ABC. GEF.

AB

AB — *B*C ∺ GE / EF.

*A*tqui etiam per propoſitionem.

AB — *B*C ∺ DE / EF.

Ergo [b] GE — EF ∺ DE / EF. b 11. V.

Adeoque [c] GE ∞ DE. c 14. V.

Eodem modo ab altera parte etiam probatur eſſe.

GF ∞ DF.

Adeoque triangula DEF. GEF habent omnia latera æqualia, ſingula ſingulis. ergo per 8. I.

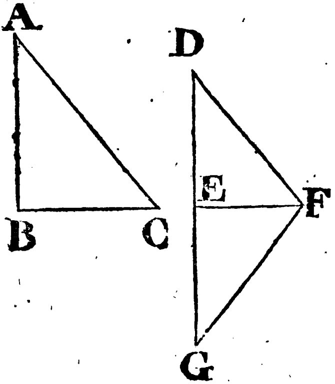
Ang. *DEF* ∞ *GEF* ∞ *B*.
Ang. *DFE* ∞ *GFE* ∞ *C*.
Ang. *D* ∞ *G* ∞ *A*.

Q. E. D.

Theor. 6.

PROPOSITIO VI.

Si duo triangula ABC. DEF, habeant unum angulum B, æqualem uni E, & latera circa eum proportionalia, (hoc eſt AB ad BC ut DE. ad EF) erunt triangula ſibi mutuo æquiangula.



De-

DEMONSTRATIO.

Ad puncta E, & F ſiant anguli FEG. EFG æquales angulis B. (hoc eſt DEF) & C. eritque tertius G æqualis tertio a A: Et triangula ABC. GEF ſimilia, b, adeoque a 32. I. b 4. VI.

AB — BC ≐ GE / EF.

Atqui etiam per propoſitionem.

AB — BC ≐ DE / EF.

Ergo c GE — EF ≐ DE / EF. c 11. V.

Adeoque d GE ꝏ DE. d 14. V.

Ergo duo triangula DEF. GEF ſe habent juxta quartam I. adeoque

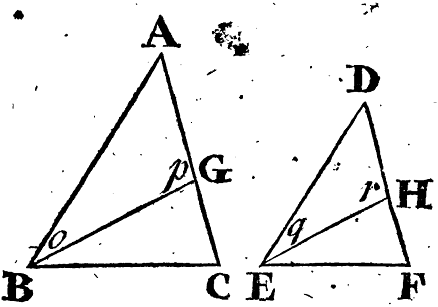
Ang. DEF ꝏ GEF ꝏ B.

Ang. DFE ꝏ GFE ꝏ C.

Ang. D ꝏ G ꝏ A.

Q. E. D.

Alia Demonſtratio.



Datur hic angulus A ∞ D. & latera circa eos proportionalia : & tum,

Eſt vel angulus B < E.

Vel B > E.

Vel B ∞ E.

Ponatur I. Angulus B < E.

Ducatur BG, ut fiat angulus O ∞ DEF eritque P ∞ R.

Ergo BA — AG = ED / DF. 4. VI.
Atqui BA — AC = ED / DF per pro.

Ergo AG ∞ AC. per 11 & 14. V.
pars & totum.

Eodem modo ducta EH. demonſtratur angulum B non eſſe poſſe minorem angulo E. Ergo B ∞ E & per 32. I. C ∞ F. Q. E. D.

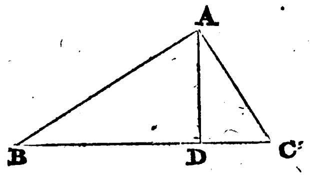
Pro-

PROPOSITIO VII. Theor. 7.

Vix ullius eſt uſus.

PROPOSITIO VIII. Theor. 8.

In triangulo rectangulo ABC, perpendicularis AD ab angulo recto in baſin ducta, ſecat triangulum in duo triangula ADB. ADC quæ erunt & toti & inter ſe ſimilia.



DEMONSTRATIO.

Pars I. In Triangulis BAC. ADB.
Ang. B eſt communis.
Ang. BAC ∞ ADB quia uterque rectus
b Ergo C ∞ BAD.

a 4. VI. Adeoque a triang. BAC ADB. ſimilia.
Deinde in triangulis BAC. ADC.
Ang. C eſt communis.
Ang. BAC ∞ ADC quia uterque rect.

---

b 32. I. b Ergo B ∞ CAD.
Adeoque a triang. BAC. ADC ſimilia.

II. Pars. Triangulum ADB eſt ſimile ipſi BAC.
Triangulum ADC eſt ſimile eidem BAC.

Ergo Triangula ADB. ADC inter ſe ſunt ſimilia per 21. VI. quæ hac non dependet.

COROLLARIUM I.

Perpendicularis ab angulo recto in baſin ducta, eſt media proportionalis inter duo baſis ſegmenta.

DEMONSTRATIO.

Duo triangula BDA. ADC, ſunt æquiangula.

a 4. VI. Ergo a BD — DA ∸ DA / DC.
Adeoque DA eſt media proportionalis inter BD. DC.

CO-

COROLLARIUM. II.

Utrumlibet laterum angulum rectum comprehendentium eſt medium proportionale inter totam baſin & illud ſegmentum baſis quod ſumpto lateri adjacet.

DEMONSTRATIO.

In triangulis ſimilibus ABC. ADC.
a BC — CA ∺ AC / CD.
Et in triangulis ſimilibus ACB. ADB
a CB — BA ∺ AB / BD.

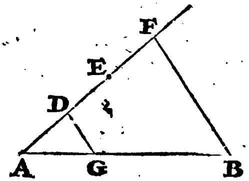
SCHOLIUM.

In deducendis triangulorum proportionibus bene notandum eſt, ordine procedendum eſſe ab angulis æqualibus circa æquales angulos ad æquales angulos.

Probl. I.

PROPOSITIO IX.

A data recta AB imperatam partem abſcindere.



CONSTRUCTIO.

Sit auferenda pars tertia.

1. Rectæ AB ſub quolibet angulo adjunge rectam AF, inque illa ſume circino tres partes æquales AD. DE. EF.

2. Ductæ FB ex D ducatur parallela DG.

Dico AG eſſe quæſitam ter-

tertiam partem rectæ AB.

DEMONSTRATIO.

In triangulo FAB lateri FB parallela eſt DG.

ergo [a] FD — DA = *BG* / GA. a 2. VI.

Et componendo 18. V.

FA — DA = *BA* / GA

Atqui FA eſt tripla ipſius DA.

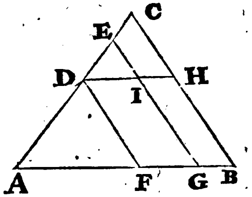
Ergo BA etiam eſt tripla ipſius GA.

Adeoque AG eſt tertia pars lineæ AB.

Probl. 2.

PROPOSITIO X.

Datam rectam AB ſimiliter ſecare ac data alia recta AC ſecta fuerit in D & E.



CONSTRUCTIO.

1. Jungantur datæ lineæ ad A.
2. Ductâ CB ex punctis D & E ducantur duæ rectæ DF. EG parallelæ ipſi CB.

Dico factum eſſe quod quæritur.

DEMONSTRATIO.

a 30. I. In triangulo AEG lineæ EG. DF ſunt parallelæ, [a] quia eiſdem lineæ CB ductæ ſunt parallelæ.

Ergo

Ergo b AF — FG ∷ AD / DE. b 2. VI.

Deinde ex D ducta DH parallela AB' erit DI ∞ FG c & IH ∞ GB. c 34. I.

Eritque in triangulo DHC.

DI. ſ. FG — IH. ſ. GB ∷ DE / EC.

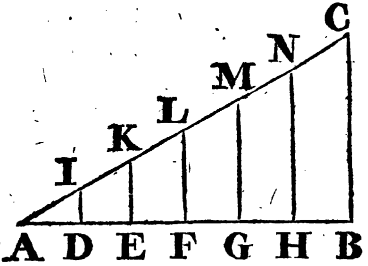
Adeoque partes AF FG. GB, ſunt proportionales partibus AD. DE. EC.

Q. E. D.

SCHOLIUM.

Hinc facile patet ratio dividendi ſineam datam in quotcunque libet partes æquales: ſumendo ſcilicet in linea datæ adjuncta, tot partes æquales in quot linea data dividenda ſit: & extremitates lineæ utriuſque recta conjungendo; ſi tum a diviſionibus intermediis ducantur rectæ parallelæ lineæ jam ductæ; illæ quæſitam facient diviſionem. Ex. Gr: ſit linea *AB* dividenda in ſex partes æquales.

CONSTRUCTIO.



1. Ipſi AB junge ſub quolibet angulo rectam AC.

2. In linea AC ſume ſes partes æquales AI. IK. KL. LM. MN. NC.

3. Duc rectam CB, illique parallelas NA. MG. LF. KE. ID.

Dico lineam AB ſectam eſſe in ſex partes æquales AD. DE. EF. FG. GH. HB.

DEMONSTRATIO.

Per propoſitionem 10. linea AB ſecta eſt ſimiliter ac AC.

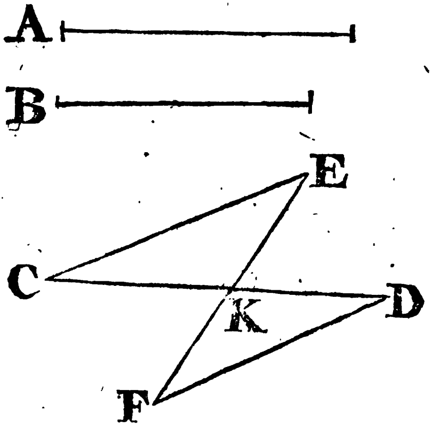
Atqui linea AC ſecta eſt in ſex partes æquales.

Ergo etiam AB in ſex æquales partes ſecta erit.

SCHOLIUM II.

Haud inconcinne linea data CD poterit dividi in ratione datarum linearum A. B. Con-

CONSTRUCTIO.



1. Ex C ſub quolibet angulo ducatur recta CE ∞ datæ A.

2. Et ex D recta DF, parallela ipſi CE, & ∞ datæ B.

3. Jungatur EF.

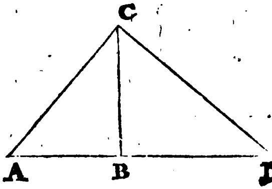
Dico rectam CE in K ſectam eſſe in ratione A ad B.

DEMONSTRATIO.

In tri. CKE. DKF	Ergo erit per 4. VI.
Ang. C ∞ D	CE. ſ. A — CK = DF ſ. C / DK.
E ∞ F 29, I.	& permutando
K ∞ K	A — C = CK / KD.

Probl. 3.

PROPOSITIO. XI.



Datis duabus rectis AB, BC tertiam proportionalem invenire.

CONSRUCTIO.

1. Datas rectas conjunge in angulo recto ABC.

2. Ad ductæ rectæ AC punctum C excita perpendicularem CD.

3. Lineam AB produc uſque ad occurſum iſtius perpendicularis in D.

Dico BD eſſe quæſitam proportionalem.

DEMONSTRATIO.

Triangulum ACB eſt rectangulum per conſtruct. & CB perpendicularis ex angulo recto ad baſin ducta: quæ [a] eſt media proportionalis inter AB & BD. Adeoque BD erit tertia quæſita.

a 1 Cor: 8. VI.

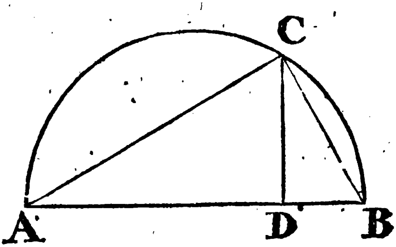
Q. F. E.

Scho-

SCHOLIUM.

Si AB ſit major quam BC haud inconcinna erit talis

CONSTRUCTIO.



1. Super AB deſcribe Semicirculum ACB.

2. In illo accommodetur ſecunda data BC.

3. Ex C demitte perpendicularem CD.

Dico DB eſſe tertiam proportionalem quæſitam.

DEMONSTRATIO.

Ducta AC erit ACB triangulum rectangulum (31. III.)

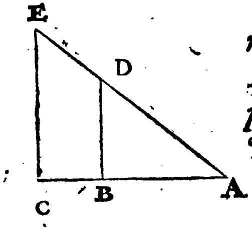
Ergò erit AB — BC = BC / BD. per 2 Cor. 8. VI.

Adeoque BD eſt tertia quæſita.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Probl. 4.



Datis tribus rectis AB. BC. AD quartam proportionalem DE invenire.

CONSTRUCTIO.

1. Datarum duas quaslibetcunque AB, BC colloca in directum.

2. Tertiam AD conjunge ad punctum A, & duc rectam DB.

3. Ex C duc CE parallelam BD, quæ productæ AD occurrat in E.

Dico DE eſſe quæſitam quartam proportionalem.

DEMONSTRATIO.

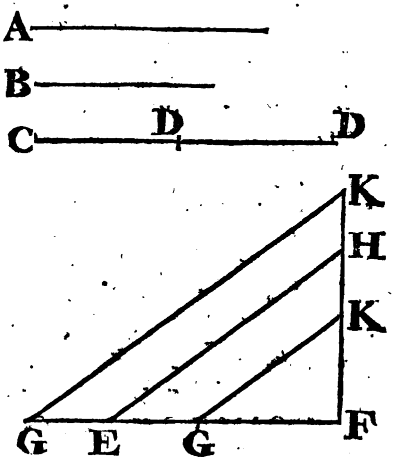
In triangulo ACE lateri CE ducta eſt parallela BD.

a 2. VI. Ergo a AB — BC = AD / DE. Adeoque erit DE quarta proportionalis.

Q. E. F.

Alia

Alia Conſtructio.



Datæ ſint tres lineæ A. B. CD, quæ eſt vel $<$ vel $>$ A.

1. Lineæ EF Ꝏ A junge FH Ꝏ B ſub quolibet angulo, ducaturque EH.

2. In linea FE ſume FG Ꝏ tertiæ CD. & ex puncto G ducatur GK parallela ipſi EH.

Dico lineam FK eſſe quartam quæſitam ſcil. FK ſupra H, ſi tertia GD ſit major prima A: At verò FK infra H ſi ſit CD $>$ A.

DEMONSTRATIO.

Facile ex conſtructione patet triangula EFH. GFK eſſe ſimilia: quare erit per 4. VI,

EF —— FH = GF / FK.

Hoc eſt

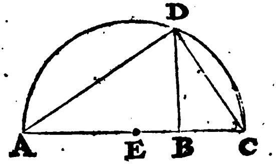
A —— B = CD / ad quartam FK.

Q. D. E.

Probl. 5.

PROPOSITIO XIII.

Datis duabus rectis AB. BC mediam proportionalem BD invenire.



CONSTRUCTIO.

1. Datas lineas AB. BC colloca in directum.

2. Super tota AC deſcribe Semicirculum.

3. Ex B excita perpendicularem BD uſque ad Semicirculum.

Dico illam eſſe mediam quæſitam.

De-

DEMONSTRATIO.

Ductis AD. DC. erit ADC triangulum rectangulum quia [a] angulus ADC eſt rectus. Et linea DB eſt perpendicularis ex angulo recto ad baſin ducta, quæ [b] eſt media proportionalis inter AB. BC.

a 31. III.

b 1 Coroll. 8. VI.

Q. F. E.

SCHOLIUM.

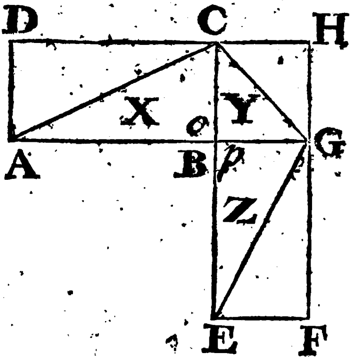
Quævis recta a circumferentia ad diametrum perpendiculariter ducta, eſt media proportionalis inter ſegmenta diametri.

PROPOSITIO XIV.

Theor. 9.

1. *Parallelogramma æqualia X. Z. quæ unum angulum O, uni P æqualem habent; etiam latera circa æquales angulos habent reciproce proportionalia. (hoc eſt AB ad BG ut EB ad BC.*

2. *Et ſi latera habent reciprocas, parallelogramma ſunt æqualia.*



De-

DEMONSTRATIO:

1 Pars. Par. [a] X — Par. Y = Z / Par. Y. [a] 7. V.
Atqui X — Y = AB / BG. } 1. VI.
Et Z — Y = EB / BC. }

Ergo ſubſtitutis iſtis rationibus.
AB — BG = EB / BC.

2 Pars. AB — BG = EB / BC.
Atqui AB — BG = X / Y. } 1. VI.
Et EB — BC = Z / Y. }

Ergo iſtis rationibus ſubſtitutis.

X — Y = Z / Y.

Adeoque [b] Par: X ∞ Par: Z. [b] 14. V.

PROPOSITIO XV.

Theor. 10.

1. *Æqualia triangula X. Z, quæ unum angulum O uni angulo P æqualem habent; etiam latera circa æquales angulos habebunt reciproce proportionalia.* (*hoc eſt AB ad BG, ut EB ad BC.*

Vide fig. præcedentem.

2. *Et ſi latera ſic habent reciproca, triangula ſunt æqualia.*

DEMONSTRATIO.

Ductis rectis AC, CG, GE, hæc eſt omnino eadem cum præcedente; quoniam [a] triangula ſunt ſemiſſes parallelogrammorum, & triangula cum parallelogrammis eadem habent latera quæ demonſtrationem ingrediuntur.

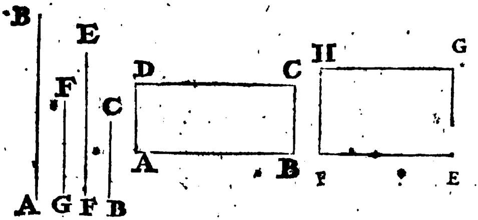
a 34. 1.

Pro-

PROPOSITIO XVI. Theor. II.

1. *Si quatuor rectæ A. G. F. B proportionales fuerint, rectangulnm ſub extremis A & B. erit æquale rectangulo ſub mediis.*

2. *Et ſi rectangulum ſub extremis, ſit æquale rectangulo ſub mediis, illæ quatuor rectæ proportionales erunt.*



DEMONSTRATIO.

1 Pars Fiat ▭ AC ſub extremis & FG ſub mediis : illa habent angulum A ∞. F, & latera reciprica, nimir: AB —— HF = reciproce FE / BC. Ergo illa a ▭la ſunt æqualia. a 14. VI.

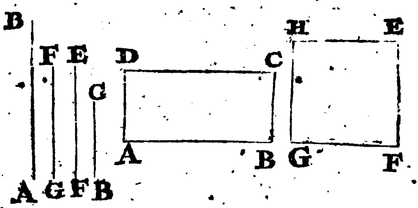
2 Pars. ▭la AC. FG habent angulum A ∞ F. & ſunt æqualia: b Ergo habent latera reciproce proportionalia. b 14. VI.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

Theor. 12. 1. *Si tres lineæ A. F. B. proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis A & B erit æquale quadrato mediæ F.*

2. *Et ſi rectangulum ſub extremis ſit æquale quadrato mediæ, tres illæ rectæ proportionales erunt.*



DEMONSTRATIO.

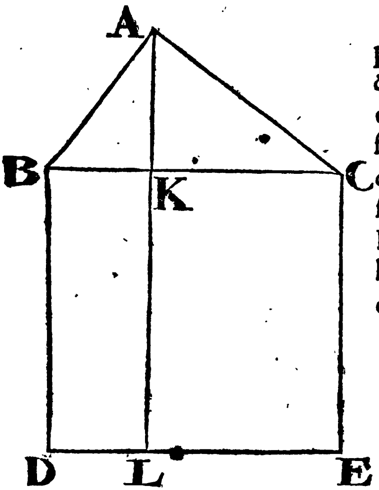
1 Pars. Fiat ſub extremis ▭ AC, & a media □ GE. Quæ quia habent angulum A ∞ G & latera reciproca ſcilicet AB — GF, ∸ FE. hoc eſt GF / BC. a erunt inter ſe æqualia.

a 14. VI.

2 Pars. ▭la AC. GE ſunt æqualia & habent angulum A ∞ G. Ergo [a] habent latera reciproca.

Pro-

SCHOLIUM.



Ex hac propoſiti & præcedente 8 facillime demonſtratur Pr. 47. I. hoc modo,

PRÆPARATIO.

Super BC conſtituatur □ BE, & ex A ducatur AL parallela BD vel CE.

DEMONSTRATIO.

Lineæ BC. AC. CK ſunt proportionales. per 8. VI.

Ergo ▭ BC. CK ꝏ □ AC.
▭ EK.

Deinde Lineæ BC. AB. BK. ſunt proportionales.

Ergo ▭ BC BK ꝏ □ AB
▭ LB
17. VI. A.

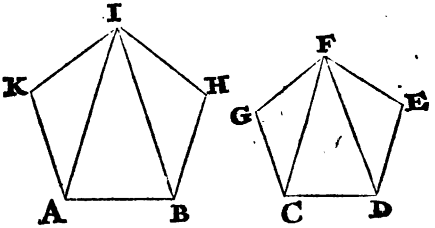
Supra ▭ EK ꝏ □ AC

▭la EK + LB ꝏ □ AB + □ AC,
□ EB

Kkk Pro-

PROPOSITIO XVIII.

Probl. 6. *Super data recta AB deſcribere polygonum ABHIK, quod dato polygono CDEFG ſit ſimile ſimiliterque poſitum.*



CONSTRUCTIO.

1. Datum Polygonum rectis FC. FD divide in triangula.

a 32. I. 2. Super AB factis angulis a BAI, ABI æqualibus angulis DCF. CDF. erit b tertius æqualis tertio. adeoque c triangulum IAB ſimile triangulo FCD.
b 32. I.
c 4. VI.

3. Eodem modo ſuper lateribus IA: IB, fiant triangula IKA. IHA. æquiangula, adeoque & ſimilia triangulis FGC. FED.

Dico ABHIKeſſe polygonum quæſitum.

DEMONSTRATIO.

Pro angulis.

Facile patet per conſtructionem angulos

los unius polygoni eſſe æquales angulis alterius. nim.

K ∞ G.

Tres ad I ∞ ad F tribus.

H ∞ E

Duo ad B ∞ ad D duobus.

Duo ad A ∞ ad C duobus.

Ergo omnes anguli ſunt æquales, adeoque duo polygona ſunt æquiangula, & ſimiliter poſita.

Pro lateribus.

In triangulis ſimilibus IKA. FGC: ut & IAB. FCD.

Erit KA — AI ≍ GC / CF. } 4. VI.
Et BA — AI ≍ DC / CF. }

Erit per 11. & 16. V.

KA —— AB ≍ GC / CD.

Deinde in triangulis ſimilibus IAB. FCD: ut & IHB. FED.

Erit AB — BI ≍ CD / DF. } 4. VI.
Et HB — BI ≍ ED / DF. }

Ergo per 11 & 16. V:

AB — BH ≍ CD / DE.

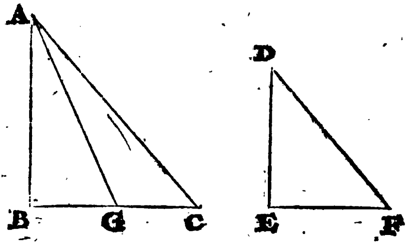
Et eodem modo demonſtratur latera circa reliquos angulos eſſe proportionalia: Ergo polygona ſunt ſimilia.

Q. E. D.

Theor. 13

PROPOSITIO XIX.

Similia triangula ABC. DEF inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum BC. EF.



DEMONSTRATIO.

Sit BC $<$ EF.

Ipſis BC. EF, fiat [a] tertia propor-
a 11. VI. tionalis BG. eritque
b 10. Def. V. BC — BG [b] in duplic. rat. BC / EF.
c 1 VI. Atqui BC — BG [c] = tr: ABC / tr: ABG

d 11. V. Ergo Triang: ABC [d] — Triang: ABG in dupl: rat: BC / EF.

Atqui triang. ABG ∽ triang. DEF. ut mox patebit.

Ergo

Ergo triang. ABC —— triang. DEF,
in dupl: rat: BC / CF.

Quod autem ſit triangulum ABG ∞ DEF, hoc modo videre licet.

In triangulis ſimilibus ABC. DEF.
AB —— BC = DE / EF. 4. VI.
Et permutando.
AB —— DE = BC / EF. 16. V.
Atqui per conſtructionem.
BC —— EF = EF / BG.

Ergo AB —— DE = EF / BG. 11. V.

Adeoque triangula ABG. DEF habent angulum B ∞ E, & latera circa illum reciproce proportionalia: Ergo ſunt [e] æqualia. e 15. VI.

Sit deinde BC ∞ EF.
In triangulis ſimilibus ABC. DEF.
AB —— BC = DE. EF.
Atqui BC ∞ EF per propoſitionem.
Ergo [f] AB ∞ DE. f 14. V.

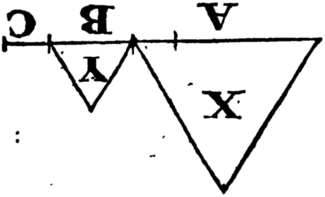
Adeoque triangula ABC. DEF inter ſe ſunt æqualia.
Atqui □ta BC & EF etiam ſunt æqualia.

Ergo triang. ABC —— triang. DEF = □ BC / □ EF.

Atqui ratio □torum BC. EF. eſt eadem cum ratione duplicata ipſorum laterum BC. EF, ut ſupra dictum eſt ad 10. Def. V:

Ergo triang. ABC — triang. DEF in dupl: rat: BC / EF.

COROLLARIUM.



Si tres lineæ A. B. C. fuerint proportionales, erit triangulum X ſupra primam ut triangulum Y priori ſimile ſupra ſecundam, ut prima linea A ad tertiam C.

DEMONSTRATIO.

Tres lineæ A. B. C. ſunt proportionales.

a 10. Def. V. Ergo A — C a in dupliicata ratione A / B.

b 19. VI. Atqui X — Y b etiam in dupl: rat: A / B.

---

c 11. V. Ergo X — Y c ☰ A / C. Q. D. E.

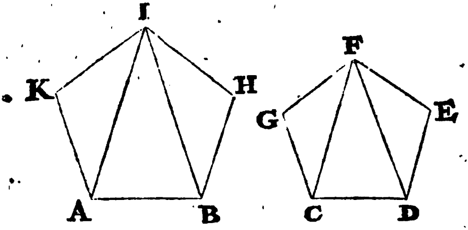
PRO-

PROPOSITIO XX.

Theor. 14.

1. *Polygona ſimilia ABHIK. CDEFG dividuntur in triangula, quæ ſunt numero æqualia, ſimilia & totis homologa.*

2. *Polygona inter ſe ſunt in ratione duplicata laterum homologorum AB. CD.*



DEMONSTRATIO.

1 Pars: Ductis rectis IA. BA. ut & FC. FD. polygona erunt diviſa in triangula.

Quod autem illa triangula ſint numero æqualia, patet ex Scholio prop. 32. I. quia nim. polygona æque multa habent latera.

Quod ſint ſimilia ſic probatur.

In

In triangulis IKA. FGC.

Ang. K ∞ G. & latera circa illos proportionalia.

a 6. VI. b 4. VI. Ergo triangulum a IKA. eſt æquiangulum & ſimile FGC. b

---

Eodem modo in triangulis IHB FED.

Ang. H ∞ E, & latera circa illos proportionalia.

Ergo triangulum IHB eſt æquiangulum & ſimile FED.

Deinde ang. KAB ∞ GCD.
KAI ∞ GCF. S

IAB ∞ FCD.

Simili modo IBA ∞ FDC.

Ergo tertius AIB ∞ CFD.

Ergo triangulum IAB eſt æquiangulum & ſimile FCD.

Quod ſint totis homologa, hoc eſt quod ita ſit quodlibet triangulum in uno polygono ad ſuum correſpondens in altero. Ut totum polygonum ad totum polygonum, patebit ex parte ſecunda.

2 Pars. Triangula IAB, FCD probata ſunt ſimilia.

c 4. VI. Ergo c IA —— FC ═ AB / CD.
Ut & IB —— FD ═ AB / CD.

Tum.

Tum.

Triangula d IKA. FGC. ſunt in duplicata ratione laterum IA. FC. d 19. VI.

hoc eſt AB. CD.

Et triangula IAB. FED d in duplicata ratione laterum IB. FD,

hoc eſt AB. CD.

Ut & triangula IAB. FCD. in duplicate ratione laterum AB. CD.

Ergo e omnia triangula unius polygoni ad omnia triangula alterius polygoni ſunt in duplicata ratione laterum homologorum AB. CD. e 12. VI.

Atqui omnia triangula iſtorum polygonorum conſtituunt tota Polygona.

Ergo ipſa polygona ſunt in duplicata ratione laterum homologorum. AB. CD.

Cum autem etiam ſingula triangula unius polygoni ad ſingula triangula alterius polygoni habent rationem duplicatam eorundem laterum AB. CD; patet iſta triangula totis polygonis eſſe homologa.

Q. E. D.

COROLLARIUM.

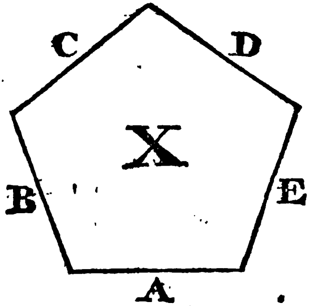
Si fuerint tres rectæ proportionales, polygonum ſuper prima deſcriptum ſe habebit ad ſimile polygonum ſuper ſecunda;

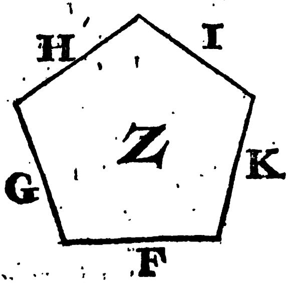
vel polygonum ſuper ſecunda ſe habebit ad polygonum ſuper tertia, ut prima proportionalis ad tertiam.

DEMONSTRATIO.

Hæc eſt fere eadem cum demonſtratione corollarii prop: præcedentis.

SCHOLIUM.





Commode hic demonſtratur haud inelegans Theorema.

Similium polygonorum X & Z, circuitus ABCDE : FGHIK, cum lateribus homologis A & F, ſunt in eadem ratione.

DEMONSTRATIO.

A—F = A / F.
B—G = A / F.
C—H = B / G.
  hoc eſt A / F.
D—I = C / H. } Def. 1. VI.
  hoc eſt A / F.
E—*K* = D / I.
  hoc eſt A / F.

Ergo per 12. V, additis omnibus terminis primis, ut & omnibus ſecundis

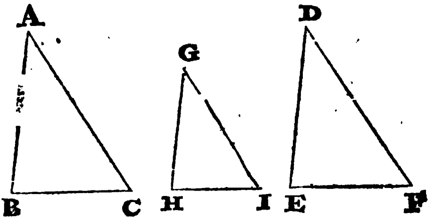
A † B † C † D † E --- F † G † H † I † K = A / F.
hoc eſt circuitus X   ad circuitum Z.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

Theor. 15

Figuræ ABC. GHI, quæ eidem figuræ DEF ſunt ſimiles, illæ & inter ſe ſimiles erunt.



DEMONSTRATIO.

Angulus A ∞ D ∞ G.
B ∞ E ∞ H.
C ∞ F ∞ I.

Ergo figuræ ABC. GHI. ſunt æquiangulæ; & habent latera circa æquales proportionalia, quia illa habent proportionalia lateribus figuræ DEF. Ergo [a] ſunt ſimiles.

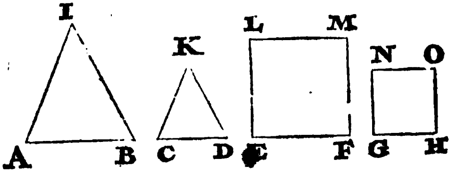
a 1 Def. VI.

Pro-

PROPOSITIO XXII. Theor. 16

1. *Si quatuor rectæ AB. CD. EF. GH. proportionales fuerint, figuræ ſimiles ABI. CDK & LF. NH proportionales erunt.*

2. *Et ſi a rectis lineæ figuræ ſimiles deſcriptæ ſint; iſtæ rectæ proportionales erunt.*



DEMONSTRATIO.

PARS I.

Datæ ſunt AB —— CD = EF | GH.

Tr. ABI (a) —— Tr. CDK in duplic. rat. AB / CD. a 19. VI.

hoc eſt EF / GH.

Atqui □ LF b —— □ NH etiam in d. r. EF / GH. b 20. VI.

Ergo.

Tr. ABI (c) —— Tr. CDK = □ LF , □ NH. c 11. V.

PARS II.

AB —— CD in ſubdup. rat. Tr. ABI , Tr. CDK.

hoc eſt □ LF / □ NH.

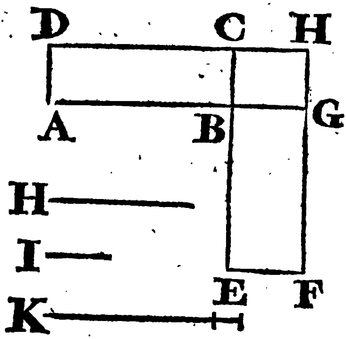
Atqui EF —— GH etiam in ſubd. r □ LF / □ NH

Ergo.

AB —— CD = EF , GH.

Theor. 17

PROPOSITIO XXIII.



Æqui-angula parallelo-gramma AB. BF. inter ſe habent rationem, compoſitam ex rationibus laterum AB ad BG & CB ad BE.

DEMONSTRATIO.

Fiat AB —— BG = H quælibet / I.
Et CB —— BE = I / K.

Erit ratio H ad K compoſita ex rationibus AB ad BG & CB ad BE. vide dicta ad 5 Def. VI.

Demonſtrandum ergo eſt eſſe parallelogr. AC — BF = H / K.

Quod ſic probo.

AC —— BH = (a) AB / BG. BH —— BF (a) = CB / BE.
H —— I = (b) AB / BG. I —— K (b) = CB / BE.
Ergo AC —— BH (c) = H / I. BH —— BF = I / K.

Ergo per 11. V.

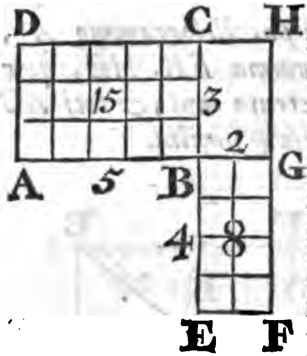
a 1. VI. AC — H = BF / K.

b per conſtr: Et permutando 16. V.

c 11. V. AC — BF = H / K. Q. E. D.

PRO-

SCHOLIUM.



Majori cum facilitate & cum apparatu minori eadem propoſitio demonſtrabitur in numeris, ſi parallelogramma AC. BF ponantur rectangula.

Sit □li AC latus AB ꝏ 5.

BC ꝏ 3.

[e] Erit Area ꝏ 15. — e 1 Def. II.

Deinde □li BF latus BG ꝏ 2.

Latus BE ꝏ 4.

[e] Erit Area ꝏ 8.

Ergo □ AC — □ BF = area 15 / ar. 16

Atqui ratio compoſita ex rationibus 5 ad 2 & 3 ad 4. etiam dat [d] $\frac{15}{8}$ ſeu rationem 15 ad 8. — d 5. Def. VI.

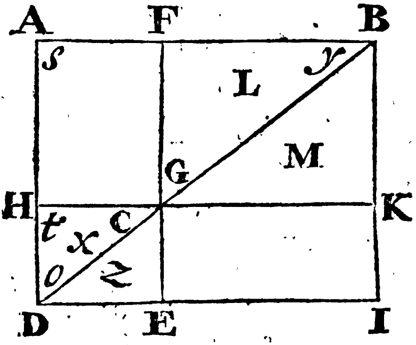
Ergo ratio □ AC — □ BF eſt compoſita ex dictis rationibus 5 ad 2 & 3 ad 4.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

Theor. 18

In omni parallelogrammo AI, parallelogramma FK. HE, quæ circa diametrum ſunt, & toti AC & inter ſe ſunt ſimilia.



DEMONSTRATIO.

In triangulis DAB & X.

Angulus O eſt communis.

a 29. I. S [a] ∞ T.

b 32. I. Ergo Y [b] ∞ C.

Adeoque triangula DAB & X ſunt æquiangula & ſimilia.

Eodem

Eodem modo probatur triangula DIB & Z eſſe ſimilia.

Ergo AD — DB = HD / DG.
Et DB — DI = DG / DE. } 4. VI.

Eritque ex æquo 22. V.

AD — DI = HD / DE.

Similiter etiam probatur reliqua latera eſſe proportionalia: Ergo Parallelogramma AI. HE, ſunt ſimilia.

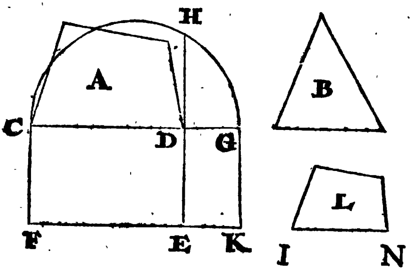
Eodem modo etiam demonſtratur AI. & *FK* eſſe ſimilia.

Ergo HE & *FK* [c] ſunt inter ſe ſimilia. c 21. VI.

Q. E. D.

Probl. 7. ## PROPOSITIO XXV.

Conſtituere rectilineum L, quod ſit ſimile ſimiliterque poſitum dato rectilineo A, & æquale alteri dato B.



CONSTRUCTIO.

1. Ad dati rectilinei A latus
a 45. 1. CD, fiat ▭ CE ∞ [a] ipſi A.
b 44. 1. 2. Super DE fiat ▭ *DK* ∞ B.
3. Inter CD & DG quæratur
c 13. VI. [c] media proportionalis DH.
4. Super DH ſeu ipſi æquali IN, deſcribatur rectilineum L

ſi-

d ſimile ipſi A. d 18. IV.

Dico L eſſe rectilineum quæſitum.

DEMONSTRATIO.

Per conſtructionem ſunt proportionales CD. IN. DG.

Ergo e CD — DG = A / L. e Cor. 19. VI.

Atqui f CD — DG = ▭ CE / ▭ DK. f 1. VI.

Ergo g A — L = ▭ CE / ▭ DK. g 11. V.

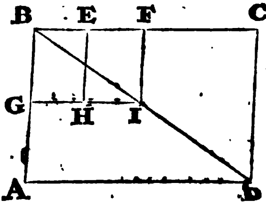
Atqui A ∞ ▭ CE.

Ergo L ∞ ▭ *DK* ∞ B.

Cum autem L per conſtructionem ſit ſimile A, patet L eſſe rectineum quæſitum.

PROPOSITIO XXVI.

Theor. 19



Parallelogramma ſimilia AC. GF, habentia communem angulum B, circa eandem diametrum BD conſiſtunt.

DEMONSTRATIO.

Si adverſarius neget diametrum BD tranſire per I, tranſeat per aliud punctum H: tum ducta HE parallela BA.

a 24. VI — Erit BA [a] — AD = BG / GH.

b per propoſ. — Atqui BA [b] — AD = BG / GI.

Ergo [c] GH ∞ GI. Pars & totum, quod eſt abſurdum.

c 7. Vel 11. V.

Ergo diameter non tranſit per H. Eadem autem demonſtratio locum habet in omnibus punctis lineæ GI, quandiu ſc: inter H & I manet aliquod intervallum: Ergo univerſim concludendum eſt diametrum tranſire per punctum angulare I, adeoque duo parallelogramma AC. GF, circa eandem diametrum conſiſtere.

Q. E. D.

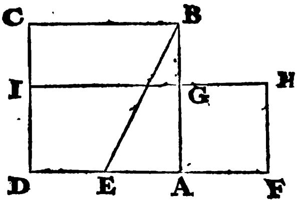
Pro-

PROPOSITIO XXVII. XXVIII. XXIX.

Hæ prolixæ, tyronibus difficiles, & nullius fere uſus ſunt.

PROPOSITIO XXX.

Prob. 10.



Propoſitam rectam AB extrema ac media ratione ſecare in G.

CONSTRUCTIO.

a 11. II.

Divide [a] AB in G, ut ▭ ſub tota AB & minori ſegmento BG ſit ꝏ □ majoris ſegmenti AG.

Dico factum eſſe quod quæritur.

DEMONSTRATIO.

▭ AB. BG ꝏ □ AG. AG.

Ergo 17. VI.

Latera ſunt reciproce proportionalia. hæ.

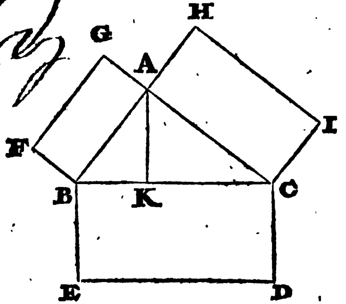
AB — AG ∸ AG / BG.

Adeoque [b] linea A in media & extrema ratione ſecta eſt. b 3 Def. VI.

Theor. 20

PROPOSITIO XXXI.

Si a lateribus trianguli rectanguli BAC, figuræ ſimiles quæcunque deſcribantur, erit illa quæ angulo recto A opponitur æqualis duabus reliquis ſimul ſumptis.



DEMONSTRATIO.

Figuræ ſuper AB. AC. BC. ponuntur ſimiles; ergo [a] habent inter ſe rationem a 20. | VI. duplicatam laterum homologorum AB. AC. BC, hoc eſt inter ſe ſunt ut □ta AB. AC. BD.

Atqui □ta ita ſunt inter ſe ut ſit

b 47. I. □ BC [b] ꝏ □tis AB. AC.

Ergo figura ſuper BC ꝏ figuris ſuper AB. AC.

Scho-

SCHOLIUM. I.

Quod in prop. 47. I. demonſtratum eſt de ſolis quadratis hic univerſim applicatur quibuslibet polygonis ſimilibus.

SCHOLIUM II.

Poteſt hæc propoſitio generaliter, ut etiam involvat prop. 47. I. hoc modo demonſtrari.

Sunt proportionales per 2 Cor. 8. VI.
BC. AC. CK Ut & BC. BA. BK.

Ergo per Coroll. 20. VI.
Fig. ab BC — Fig. ab AC ≐ BC / CK.
Fig. ab BC — Fig. ab BA = BC / BK.

Et invertendo.
CK — BC = Fig. ab AC / fig. ab BC.
BK — BC = Fig. ab BA / fig. ab BC.

Erit per 2. V.
BK + KC — BC = Fig. ab AB + Fig. ab AC. / Fig. ab BC.
Atqui BK + KC ∞ BC.
Ergo Fig. ab AB & AC ∞ Fig. ab BC.

Quare ſi iſtæ ſiguræ ſunt quadrata, erit prop. 47. I.

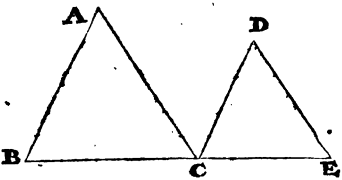
Si vero aliæ figuræ ſimiles erit 31. VI.

PRO-

Theor. 21

PROPOSITIO XXXII.

Si duo triangula ABC. DCE ad angulum C conjuncta, duo latera AB. AC habeant parallela lateribus DC. DE. & latera circa angulos A. D. proportionalia; tum reliqua illorum latera BC. CE, unam facient lineam rectam.



DEMONSTRATIO.

a 29. I. Angulus A. ∞ a ACD, propter parallelas AB. DC.

Angulus D ∞ a ACD, propter parallelas AC. DE.

Ergo ang. A ∞ D.

Cum autem latera circa angulos A & D ſint proportionalia, erit

rit triang. [b] ABC æquiangulum triang. DCE. b 6. VI.

Adeoque ang. ABC ∞ DCE) A.
Ang. A ∞ ACD.

Ang. A & ABC ∞ toti ACE. \ A.
ACB ACB

Tres ang. A. ABC. ACB ∞ duobus ACB. ACE.
[c] Atqui tres A. ABC. ACB ∞ 2 Rectis. c 32. I.

Ergo etiam duo ACB. ACE ∞ 2 Rectis.

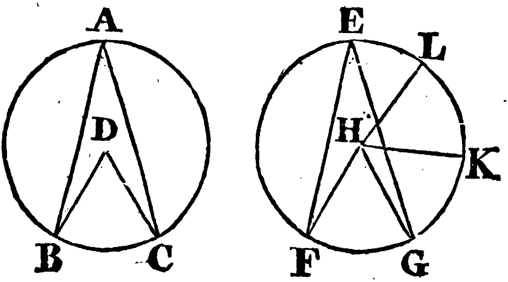
Adeoque BC. CE ſibi invicem [d] jacebunt in directum. d 14. I.

Theor. 22

PROPOSITIO XXXIII.

1. *In æqualibus circulis anguli ſive ad peripheriam A & E, ſive ad centra D & H, ſunt in eadem ratione cum arcubus quibus inſiſtunt BC. FG.*

2. *Et Sectores BDC. FGH, eandem cum arcubus habent rationem.*



DEMONSTRATIO.

PARS I.

Si anguli D & H ad centra ſint æquales; erunt arcus BC, & FG etiam (26. III.) inter ſe æquales.

Fiat

Fiat jam angulus GHK ∞ FHG adeoque FH*K* duplus FHG hoc eſt BDC.

Tum arcus GK erit ∞ FG (per eandem 26. III) & totus FGK duplus ipſius FG hoc BC.

Eodem modo ſi fiat arcus *KHL* ∞ *GHK* ſ. *FHG*. ∞ *BDC* adeoque *FHL* triplus *BDC*, etiam probabitur arcum *FGKL* eſſe triplum arcus *BC*.

Ergo hinc univerſim concludimus ſi anguli D.&H. ſint æquales, eſſe arcus BC. FG æquales: Si anguli D & *H* ſint inæquales, etiam arcus eſſe inæquales, & hoc juxta quam libet multiplicationem. ut nim. ſi *H* ſit duplus D etiam arius F*K* ſit duplus BC: ſi angulus *H* ſit triplus D. & arcum FGKL & ipſius BC ſit triplus: & ſic in infinitum: id quod idem eſt ac angulos cum arcubus eſſe in eadem ratione.

Et quia anguli A. E. ſunt ſemiſ-